LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2021
26. Juli 2021

Lineare Algebra
(Lehramt Gymnasium)

Klausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❏ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten befinden sich auf dem Papierstreifen, der an die Klausur angeheftet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_3$ bestehend aus drei Elementen.

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & & + & \bar{2}x_3 & + & x_4 & = & \bar{2} \\
\bar{2}x_1 & + & \bar{2}x_2 & + & x_3 & & & = & \bar{0} \\
 & & \bar{2}x_2 & & & + & x_4 & = & \bar{2} \\
\bar{2}x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & \bar{2}
\end{array}$$

Geben Sie alle Elemente der Lösungsmenge $\mathscr{L} \subseteq \mathbb{F}_3^4$ einzeln an.

Name: ____

Aufgabe 2. (3+2+2+3 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer *Äquivalenzrelation* auf einer Menge X an. (Dazu gehört auch, dass Sie die Definitionen der drei Eigenschaften angeben, die eine Äquivalenzrelation ausmachen.)

(b) Wie ist die *Äquivalenzklasse* eines Elements $x \in X$ bezüglich einer Äquivalenzrelation $\sim$ auf X definiert?

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Laut Vorlesung sind die Elemente von $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ die Äquivalenzklassen einer speziellen Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$. Geben Sie diese Relation an.

(d) Berechnen Sie das eindeutig bestimmte Element $a \in \mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$ mit $\bar{5} \cdot a = \bar{6}$.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (4+2+4 Punkte)

Sei $V = \mathscr{M}_{2,\mathbb{C}}$ der $\mathbb{C}$-Vektorraum der komplexen 2×2-Matrizen und $B \in \mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}$ eine beliebige 2×3-Matrix.

(a) Zeigen Sie, dass durch $\phi : \mathscr{M}_{2,\mathbb{C}} \to \mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}$, $A \mapsto AB$ eine lineare Abbildung gegeben ist.

(b) Begründen Sie, dass $U = \{A \in V \mid AB = 0_{\mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{C}}}\}$ ein Untervektorraum von V ist.

(c) Weisen Sie nach, dass $W = \{A \in V \mid A^2 = 0_{\mathscr{M}_{2,\mathbb{C}}}\}$ *kein* Untervektorraum von V ist.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (2+5+3 Punkte)

Sei K ein Körper.

(a) Wie ist die *Dimension* eines endlich erzeugten K-Vektorraums definiert?

(b) Sei V ein K-Vektorraum, und sei $\{v_1, v_2\}$ eine zweielementige Teilmenge von V. Beweisen Sie die Gleichung $\mathrm{lin}\{v_1, v_2\} = \mathrm{lin}\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$.

(c) Zeigen Sie: Ist $\{v_1 + v_2, v_1 + 2v_2, 3v_1 - v_2\}$ eine dreielementige Teilmenge von V (die drei angegebenen Elemente also verschieden), so ist die Menge linear abhängig.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (3+4+3 Punkte)

(a) Sei $\phi : \mathscr{M}_{2\times 3,\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^4$ eine surjektive lineare Abbildung.
Bestimmen Sie die Dimension von $\ker(\phi)$.

(b) Sei V ein 4-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien U, W zwei Untervektorräume von V mit $\dim U = 2$ und $\dim W = 3$. Begründen Sie, dass der Durchschnitt $U \cap W$ mindestens ein- und höchstens zweidimensional ist.

(c) Sei nun $V = \mathbb{R}^4$. Geben Sie jeweils konkrete Untervektorräume U und W von V an, so dass

(i) $\dim(U \cap W) = 1$ bzw. (ii) $\dim(U \cap W) = 2$

gilt. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (6+4 Punkte)

Sei $V = \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen und sei $\phi : V \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung gegeben durch

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} \\ a_{12} + a_{21} \\ a_{22} \end{pmatrix}.$$

Wir betrachte in V die geordnete Basis $\mathscr{A} = (B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$ gegeben durch die vier Basismatrizen, und in $\mathbb{R}^3$ die geordnete Basis

$$\mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

(a) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\phi) \in \mathscr{M}_{3\times 4,\mathbb{R}}$.

(b) Sei $A \in V$ mit $\Phi_{\mathscr{A}}(A) = (1, 2, 3, 4)$. Berechnen Sie $\Phi_{\mathscr{B}}(\phi(A))$ und $\phi(A)$.

In Teil (b) bezeichnen $\Phi_{\mathscr{A}} : V \to \mathbb{R}^4$ und $\Phi_{\mathscr{B}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ wie immer die Koordinatenabbildungen bezüglich der Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

(a) Es sei $\mathbb{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \alpha+\bar{1}\}$ ein Körper bestehend aus vier Elementen, wobei $\bar{0}$ das Null- und $\bar{1}$ das Einselement des Körpers bezeichnet. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{F}_4}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \alpha+\bar{1} \\ \alpha & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\alpha(\alpha+\bar{1}) = \bar{1}$ und $\beta+\beta = \bar{0}$ für alle $\beta \in \mathbb{F}_4$ gilt.

(b) Wir betrachten die Matrix $B \in \mathscr{M}_{5,\mathbb{Q}}$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Laut Vorlesung ist die Determinante von B gegeben durch die Leibniz-Formel $\det(B) = \sum_{\sigma \in S_5} s_\sigma$ mit $s_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot b_{1,\sigma(1)} \cdot b_{2,\sigma(2)} \cdot \ldots \cdot b_{5,\sigma(5)}$ für alle $\sigma \in S_5$. Geben Sie die eindeutig bestimmte Permutation $\sigma \in S_5$ mit $s_\sigma \neq 0$ an, und berechnen Sie den Summanden s_σ.

Name: ____________________

Aufgabe 8. (2+4+4 Punkte)

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$, K ein Körper, $A \in \mathscr{M}_{n,K}$ und $v \in K^n$. Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit v ein Eigenvektor von A ist?

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der folgenden reellen 3×3-Matrix.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 4 \\ 20 & -17 & 40 \\ 8 & -8 & 19 \end{pmatrix}.$$

(c) Zeigen Sie, dass A diagonalisierbar ist, und geben Sie eine Diagonalmatrix $D \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ an, die ähnlich zu A ist.