LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2021
22. Juli 2021

Lineare Algebra

(Lehramt Gymnasium)

Klausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❏ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten befinden sich auf dem Papierstreifen, der an die Klausur angeheftet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt, und lassen Sie die Rückseiten unbeschriftet.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_7$ mit sieben Elementen.

$$\begin{array}{rcrcrcl} \bar{3}x_1 & + & \bar{5}x_2 & + & x_3 & = & \bar{2} \\ \bar{4}x_1 & + & \bar{4}x_2 & + & \bar{2}x_3 & = & \bar{5} \\ x_1 & & & + & \bar{6}x_3 & = & \bar{3} \end{array}$$

Geben Sie alle Elemente der Lösungsmenge $\mathscr{L} \subseteq \mathbb{F}_7^3$ dieses LGS einzeln an.

Name: _____

Aufgabe 2. (4+3+3 Punkte)

(a) Bestimmen Sie den Kehrwert $\overline{28}^{-1}$ des Elements $\overline{28} \in \mathbb{F}_{17}$.

(b) Laut Vorlesung sind die Elemente des Rings $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ bestimmte Teilmengen von $\mathbb{Z}$. Welche Teilmengen sind das? Geben Sie diese an.

(c) Begründen Sie, dass $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ kein Körper ist.

Name: _____

Aufgabe 3. (4+3+3 Punkte)

Wir betrachten auf $V = \mathbb{C}^2$ die Abbildung $\phi : V \to V$, $\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} z_1 + \bar{z}_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$.
Außerdem sei $U \subseteq V$ gegeben durch

$$U \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; \mathrm{Re}(z_1) = \mathrm{Im}(z_2) \right\}.$$

(Ist $z_2 = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, dann bezeichnet $\bar{z}_2$ jeweils die zu z_2 konjugiert-komplexe Zahl, d.h. es ist $\bar{z}_2 = a - ib$.)

(a) Zeigen Sie, dass U ein Untervektorraum von V ist, wenn man V als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet, mit der üblichen komponentenweisen Addition als Vektoraddition und der skalaren Multiplikation gegeben durch

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \longrightarrow V \quad , \qquad \left(\lambda, \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \begin{pmatrix} \lambda z_1 \\ \lambda z_2 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie außerdem (ohne Begründung) die Dimension von U an.

(b) Weisen Sie nach, dass ϕ eine lineare Abbildung ist, wenn man V wie in Teil (a) als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet.

(c) Zeigen Sie, dass ϕ *keine* lineare Abbildung ist, wenn man V auf die gewöhnliche Weise als $\mathbb{C}$-Vektorraum betrachtet.

Name: _____

Aufgabe 4. (2+3+5 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $S \subseteq V$ eine Teilmenge. Geben Sie die Definition von $\mathrm{lin}(S)$ an.

(b) Geben Sie eine fünfelementige Teilmenge S des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^3$ an, so dass $\dim \mathrm{lin}(S) = 2$ gilt. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(c) Zeigen Sie: Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\{v, w\}$ eine zweielementige, linear unabhängige Teilmenge von V, dann besteht auch die Menge $\{v + 2w, 3v + 4w\}$ aus zwei verschiedenen Elementen und ist ebenfalls linear unabhängig.

Name: _____

Aufgabe 5. (4 + 6 Punkte)

(a) Seien U, W Untervektorräume des $\mathbb{R}^5$ mit $\dim U = 3$, $\dim W = 4$ und $U + W = \mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie die Dimension des Durchschnitts $U \cap W$.

(b) Begründen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass es keine injektive lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^4$ gibt.

Name: _____

Aufgabe 6. (7+3 Punkte)

(a) Wir betrachten den Untervektorraum U des $\mathbb{R}^3$ gegeben durch $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$. Auf diesem sind durch

$$\mathscr{A} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{und} \qquad \mathscr{B} = \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

geordnete Basen definiert. (Das braucht nicht gezeigt werden.) Berechnen Sie das Bild des Vektors $v = (2, 5, -7) \in U$ unter der linearen Abbildung $\phi : U \to U$ gegeben durch $\phi = \mathscr{L}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(A)$ mit der Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

(b) Sei nun V ein dreidimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei $\mathscr{B} = (v_1, v_2, v_3)$ eine geordnete Basis von V. Es sei ϕ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft, dass v_3 ein Eigenvektor von ϕ zum Eigenwert 5 ist. Welcher Teil der Darstellungsmatrix $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\phi) \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$ ist durch diese Bedingung festgelegt, und wie sieht dieser Teil der Matrix aus? Eine Begründung ist hier *nicht* erforderlich.

Name: _____

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

(a) Berechnen Sie mit dem Gauß-Verfahren die Determinante der folgenden Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{F}_{11}}$ über dem Körper $\mathbb{F}_{11}$.

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{5} & \bar{9} \\ \bar{2} & \bar{7} & \overline{10} \\ \bar{4} & \bar{3} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

(Eine Berechnung der Determinante auf anderem Weg, zum Beispiel mit der Sarrus-Regel, wird hier nicht als Lösung akzeptiert und bringt keine Punkte.)

(b) Stellen Sie das folgende Element $\sigma \in S_7$ als Produkt von Transpositionen dar, und berechnen Sie das Signum $\operatorname{sgn}(\sigma)$.

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Name: _____

Aufgabe 8. (2+3+5 Punkte)

(a) Sei K ein Körper und V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum. Was bedeutet es *nach Definition*, dass ein Endomorphismus ϕ von V diagonalisierbar ist? (Bitte beachten, dass hier nach der Definition gefragt ist, nicht nach einem äquivalenten Kriterium.)

(b) Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{F}_5}$ gegeben durch

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{3} \\ \bar{2} & \bar{4} & \bar{2} \end{pmatrix}.$$

(c) Berechnen Sie für jeden Eigenwert der Matrix A einen zugehörigen Eigenvektor.