LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2021
12. Oktober 2021

Lineare Algebra

(Lehramt Gymnasium)

Nachholklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❏ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten befinden sich auf dem Papierstreifen, der an die Klausur angeheftet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ der Körper mit zwei Elementen. Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{F}_2$ die Lösungsmenge $\mathscr{L}_a \subseteq \mathbb{F}_2^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & x_3 & = & a \\ x_1 & + & ax_2 & & & = & \bar{0} \\ x_1 & + & ax_2 & + & ax_3 & = & \bar{0} \end{array}$$

Lösung:

Wir berechnen die Lösungsmenge $\mathscr{L}_{\bar{0}}$, indem wir im gesamten Gleichungssystem das a durch $\bar{0}$ ersetzen, das LGS in Matrixform übersetzen und mit dem Gaußverfahren in normierte ZSF überführen.

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

An der letzten Matrix kann abgelesen werden, dass die Lösungsmenge durch

$$\mathscr{L}_{\bar{0}} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{F}_2 \;,\; x_1 = x_3 = \bar{0} \right\} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ x_2 \\ \bar{0} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{F}_2 \right\} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \;,\; \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}$$

gegeben ist. Nun wenden wir dasselbe Verfahren für $a = \bar{1}$ an.

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Diesmal entspricht die letzte Matrix dem LGS $x_1 = \bar{1}$, $x_2 = \bar{1}$, $x_3 = \bar{0}$, wir erhalten somit die Lösungsmenge

$$\mathscr{L}_{\bar{1}} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}.$$

Name: _____

Aufgabe 2. (2+2+2+4 Punkte)

(a) Sei X eine Menge, $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X und $x \in X$ ein beliebiges Element. Wie ist die Äquivalenzklasse $[x]_\sim$ von x bezüglich $\sim$ definiert?

(b) Ist es möglich, dass für zwei Elemente $x, y \in X$ zwar $x \neq y$, aber $[x]_\sim = [y]_\sim$ gilt? Falls ja, geben Sie ein konkretes Beispiel für X, $\sim$, x und y an, bei dem das der Fall ist. (Ein Nachweis der Gleichung $[x]_\sim = [y]_\sim$ für das Beispiel ist aber *nicht* erforderlich.)

(c) Wie in der Vorlesung bezeichnet $\equiv_6$ die Kongruenzrelation modulo 6 auf der Menge $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen. Geben Sie (ohne Nachweis) die Elemente der Äquivalenzklasse von 7 bezüglich $\equiv_6$ an.

(d) Bestimmen Sie alle Elemente des Restklassenrings $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, die einen Kehrwert besitzen, und geben Sie den Kehrwert jeweils an. Auch hier ist *kein* Nachweis erforderlich.

Lösung:

zu (a) Die Äquivalenzklasse von x ist gegeben durch $[x]_\sim = \{y \in X \mid x \sim y\}$.

zu (b) Ja, das ist möglich. Sei beispielsweise $X = \mathbb{Z}$, $\sim = \equiv_2$ (die Kongruenzrelation modulo 2), $x = 0$ und $y = 2$. Dann gilt einerseits $0 \neq 2$, andererseits aber $0 \equiv_2 2$ und somit $[0]_{\equiv_2} = [2]_{\equiv_2}$.

zu (c) Es ist $[7]_{\equiv 6} = \{7 + 6m \mid m \in \mathbb{Z}\}$.

zu (d) In $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ besitzen die Elemente $\bar{1}$, $\bar{3}$, $\bar{5}$ und $\bar{7}$ jeweils einen Kehrwert. Diese sind gegeben durch $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{3}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{5}$ und $\bar{7}^{-1} = \bar{7}$.

Name: _____

Aufgabe 3. (3+3+4 Punkte)

(a) Geben Sie eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$ an, so dass U mit der auf U eingeschränkten Vektoraddition des $\mathbb{R}^2$ eine Gruppe, aber kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(b) Wir betrachten auf der Menge $\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ die Verknüpfung $*$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{12} \\ a_{21}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}.$$

Entscheiden Sie, ob $(\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}, *)$ eine Gruppe ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(c) Nun betrachten wir die Menge $\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die folgende Teilmenge $V \subseteq \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ ein Untervektorraum von $\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ ist.

$$V \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}} \;\middle|\; a_{11} + a_{22} = 0 \right\}$$

Lösung:

zu (a) Die Teilmenge $\mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ ist zwar eine Untergruppe von $(\mathbb{R}^2, +)$, aber kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$.

zu (b) Nehmen wir an, das Paar $(\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}, *)$ ist eine Gruppe. Da für alle $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ jeweils

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

gilt, müsste $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ das Neutralelement dieser Gruppe sein. Für alle $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in \mathbb{R}$ gilt aber

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass das Element $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ kein Inverses besitzt. Also ist $(\mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}, *)$ *keine* Gruppe.

zu (c) Seien $A, B \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $A + B \in U$ und $\lambda A \in U$. Wegen $A, B \in U$ gibt es a_{ij}, b_{ij} $(1 \leq i, j \leq 2)$ mit $a_{11} + a_{22} = 0$ und

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}.$$

Wegen $(a_{11} + b_{11}) + (a_{22} + b_{22}) = (a_{11} + a_{22}) + (b_{11} + b_{22}) = 0 + 0 = 0$ liegt $A + B$ in U, und wegen $\lambda a_{11} + \lambda a_{22} = \lambda(a_{11} + a_{22}) = \lambda \cdot 0 = 0$ ist auch λA in U enthalten.

Name: _____

Aufgabe 4. (4+3+3 Punkte)

(a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der $\mathbb{C}^3$ sowohl als $\mathbb{C}$- als auch als $\mathbb{R}$-Vektorraum aufgefasst werden kann. Geben Sie je zwei verschiedene Basen von $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}$- bzw. als $\mathbb{R}$-Vektorraum an (insgesamt also vier Basen). Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

(b) Sei nun V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, und seien $v_1, v_2 \in V$ zwei verschiedene Elemente. Beweisen Sie die Gleichung $\text{lin}\{v_1 - v_2, v_2\} = \text{lin}\{v_1 + v_2, v_1 - 2v_2\}$.

(c) Nun sei $\{w_1, w_2, w_3\}$ eine dreielementige linear unabhängige Teilmenge eines $\mathbb{R}$-Vektorraums V. Zeigen Sie, dass dann auch $\{w_1 + w_2, w_1 + w_3, w_2 + w_3\}$ eine dreielementige linear unabhängige Teilmenge von V ist.

Lösung:

zu (a) Die beiden dreielementigen Mengen

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

sind Basen von $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Die beiden sechselementigen Mengen

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}i\\i\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\i\end{pmatrix} \right\}$$

sind Basen von $\mathbb{C}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

zu (b) Laut Vorlesung genügt es zu zeigen, dass die Inklusionen $\{v_1 - v_2, v_2\} \subseteq \text{lin}\{v_1 + v_2, v_1 - 2v_2\}$ und $\{v_1+v_2, v_1-2v_2\} \subseteq \text{lin}\{v_1-v_2, v_2\}$ gelten. Da $\text{lin}\{v_1+v_2, v_1-2v_2\}$ ein Untervektorraum von V ist, sind mit v_1+v_2 und v_1-2v_2 auch die Elemente $(v_1-2v_2)-(v_1+v_2) = -3v_2$, $(-\frac{1}{3})(-3v_2) = v_2$, $2v_2$ und $(v_1+v_2)-2v_2 = v_1-v_2$ in $\text{lin}\{v_1+v_2, v_1-2v_2\}$ enthalten. Damit ist die erste Inklusion nachgewiesen. Umgekehrt liegen in $\text{lin}\{v_1-v_2, v_2\}$ mit $v_1 - v_2$ und v_2 auch die Elemente $(v_1 - v_2) - v_2 = v_1 - 2v_2$, $2v_2$ und $(v_1 - v_2) + 2v_2 = v_1 + v_2$ in diesem Untervektorraum. Dies beweist die zweite Inklusion.

zu (c) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1(w_1 + w_2) + \lambda_2(w_1 + w_3) + \lambda_3(w_2 + w_3) \quad = \quad 0_V$$

vorgegeben. Zu zeigen ist $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Die soben angegebene Gleichung kann umgeformt werden zu

$$(\lambda_1 + \lambda_2)w_1 + (\lambda_1 + \lambda_3)w_2 + (\lambda_2 + \lambda_3)w_3 \quad = \quad 0_V. \qquad (*)$$

Da die Menge $\{w_1, w_2, w_3\}$ dreielementig und linear unabhängig ist, ist auch das Tupel (w_1, w_2, w_3) linear unabhängig, und die Gleichung (*) liefert $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_1 + \lambda_3 = \lambda_2 + \lambda_3 = 0$. Subtraktion der ersten beiden Gleichungen voneinander liefert $\lambda_3 - \lambda_2 = 0$, also $\lambda_2 = \lambda_3$. Setzen wir dies in die Gleichung $\lambda_2 + \lambda_3 = 0$ ein, dann folgt $2\lambda_2 = 0$ und $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$. Einsetzen in $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ liefert $\lambda_1 + 0 = 0$ und $\lambda_1 = 0$. Insgesamt ist damit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ nachgewiesen.

Name: _____

Aufgabe 5. (2+4+4 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, und seien $m, n \in \mathbb{N}$. Geben Sie die Definition des Zeilen- und des Spaltenrangs einer Matrix $A \in \mathscr{M}_{m\times n,K}$ an, und formulieren Sie den Rangsatz.

(b) Bestimmen Sie die Dimension des Untervektorraums $V \subseteq \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ aus Aufgabe 3 (c),

$$V \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \;\middle|\; a_{11} + a_{22} = 0 \right\} \quad ,$$

durch Anwendung des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen.

(c) Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 8. Zeigen Sie, dass es keine Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ mit $\dim U_i = 7$ für $1 \leq i \leq 3$ und $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 4$ gibt.

Lösung:

zu (a) Nach Definition ist der Zeilenrang von A die Dimension des Zeilenraums von A, also die Dimension des von den Zeilen der Matrix erzeugten Untervektorraums des K^n. Entsprechend ist der Spaltenrang die Dimension des Spaltenraums von A. Dies ist der Untervektorraum des K^m, der von den Spalten der Matrix A aufgespannt wird.

zu (b) Wir betrachten die Abbildung $\phi : \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) \quad = \quad a_{11} + a_{22}.$$

Diese Abbildung ist linear, denn für alle a_{ij}, b_{ij} $(1 \leq i, j \leq 2)$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \phi\left(\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix}\right) \quad = \quad (a_{11}+b_{11}) + (a_{22}+b_{22}) \quad =$$

$$(a_{11}+a_{22}) + (b_{11}+b_{22}) \quad = \quad \phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) + \phi\left(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}\right)$$

und

$$\phi\left(\lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \lambda a_{11} + \lambda a_{22} \quad = \quad \lambda(a_{11}+a_{22}) \quad = \quad \lambda\phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right).$$

Die Abbildung ist surjektiv, denn ist $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben, dann gilt $\phi(\frac{1}{2}cE_2) = \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}c = c$. Die Äquivalenz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \ker(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad \phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{11} + a_{22} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in V$$

zeigt außerdem, dass $V = \ker(\phi)$ gilt. Laut Vorlesung gilt $\dim \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}} = 2 \cdot 2 = 4$. Der Dimensionssatz für lineare Abbildungen liefert nun $\dim V = \dim \ker(\phi) = \dim \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}} - \dim \mathbb{R} = 4 - 1 = 3$.

zu (c) Nehmen wir an, die Untervektorräume $U_1, U_2, U_3 \subseteq V$ haben diese Eigenschaften. Wegen $U_1 + U_2 \subseteq V$ gilt $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V = 8$, und auf Grund des Schnittdimensionssatzes folgt $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2 - \dim(U_1 + U_2) \geq 7 + 7 - 8 = 6$. Wegen $(U_1 \cap U_2) + U_3 \subseteq V$ gilt auch $\dim((U_1 \cap U_2) + U_3) \leq 8$. Eine erneute Anwendung des Schnittdimensionssatzes liefert

$$\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) \quad = \quad \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_3) - \dim((U_1 \cap U_2) + U_3) \quad \geq \quad 6 + 7 - 8 \quad = \quad 5.$$

Aber dies widerspricht der Annahme $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 4$. Also gibt es keine Untervektorräume U_1, U_2, U_3 mit den angegebenen Eigenschaften.

Name: _____

Aufgabe 6. (2+4+4 Punkte)

Auch in dieser Aufgabe betrachten wir den Untervektorraum $V \subseteq \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$V \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}} \;\middle|\; a_{11} + a_{22} = 0 \right\}.$$

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass durch

$$\mathscr{B} \quad = \quad \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right)$$

eine geordnete Basis von V gegeben ist.

(a) Bestimmen Sie den Koordinatenvektor $\Phi_{\mathscr{B}} \left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \right)$.

(b) Berechnen Sie die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}(\phi)$ der linearen Abbildung

$$\phi : V \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad , \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a+b, c+d) \quad ,$$

wobei $\mathscr{E} = (e_1, e_2)$ die Einheitsbasis des $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

(c) Sei nun $\psi : V \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung gegeben durch $\psi = \mathscr{L}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}(A)$, mit der Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Bild $\psi \left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \right)$.

Lösung:

zu (a) Auf Grund der Gleichung

$$\tfrac{5}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (-\tfrac{1}{2}) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

gilt $\Phi_{\mathscr{B}} \left(\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \right) = (\tfrac{5}{2}, -\tfrac{1}{2}, 5)$.

zu (b) Die Bilder der Basisvektoren unter der linearen Abbildung sind gegeben durch

$$\phi \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (1,1) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 \quad , \quad \phi \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right) = (1,-1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2 \quad ,$$

$$\phi \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = (1,-1) = 1 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2$$

Die gesuchte Darstellungsmatrix ist also gegeben durch

$$\mathscr{M}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}(\phi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

zu (c) Aus der Gleichung $\psi = \mathscr{L}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}(A)$ folgt $\mathscr{M}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}(\psi) = A$, denn laut Vorlesung sind die Abbldungen $\mathscr{L}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}$ und $\mathscr{M}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}$ zueinander invers. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\psi\left(\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\right) &= \Phi_{\mathscr{E}}\left(\psi\left(\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\right)\right) = \mathscr{M}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{B}}(\psi)\Phi_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix}5 & 2\\ 3 & -5\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\\ 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{33}{2}\\ \frac{51}{2}\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Name: _____

Aufgabe 7. (4+3+3 Punkte)

(a) Sei $\mathbb{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \alpha + \bar{1}\}$ der Körper mit vier Elementen, wobei $\bar{0}$ das Null- und $\bar{1}$ das Einselement des Körpers bezeichnet. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $A \in \mathscr{M}_{4,\mathbb{F}_4}$ gegeben durch

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{0} & \alpha & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \alpha + \bar{1} \\ \alpha & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix}.$$

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass $\alpha(\alpha + \bar{1}) = \bar{1}$ und $\beta + \beta = \bar{0}$ für alle $\beta \in \mathbb{F}_4$ gilt.

(b) Sei $\mathscr{B}$ eine geordnete Basis von $\mathbb{F}_4^4$ und $\phi : \mathbb{F}_4^4 \to \mathbb{F}_4^4$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\phi) = A$. Ist die Abbildung ϕ bijektiv? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe der Leibniz-Formel die Determinante der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

zu (a) Wir berechnen die Determinante durch Entwicklung nach der zweiten Zeile und anschließende Anwendung der Sarrus-Regel. Da für jedes Element β aus $\mathbb{F}_4$ jeweils $\beta = -\beta$ gilt, verzichten wir von Anfang an auf die Verwendung des Minuszeichens.

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{0} & \alpha & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \alpha + \bar{1} \\ \alpha & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \quad = \quad \alpha \cdot \begin{pmatrix} \bar{0} & \alpha & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} & \alpha + \bar{1} \\ \alpha & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \quad = \quad \alpha \cdot (\bar{0} + \alpha(\alpha + \bar{1})\alpha + \bar{0} + \alpha + \bar{0} + \alpha) \quad =$$

$$\alpha \cdot (\alpha + \alpha + \alpha) \quad = \quad \alpha^2 \quad = \quad \alpha + \bar{1} \quad ,$$

wobei die letzte Gleichung durch $\alpha^2 + \alpha = \alpha(\alpha + \bar{1}) = \bar{1} \Leftrightarrow \alpha^2 = \alpha + \bar{1}$ zu Stande kommt.

zu (b) Ja, die lineare Abbildung ϕ ist bijektiv. Denn wegen $\det \mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\phi) = \det A = \alpha + \bar{1} \neq \bar{0}$ ist die Matrix $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{B}}(\phi)$ invertierbar, und daraus folgt laut Vorlesung die Bijektivität von ϕ.

zu (c) Bezeichnen wir die angegebene Matrix mit $B = (b_{ij})$, dann lautet die Leibnizformel $\det B = \sum_{\sigma \in S_6} s_\sigma$ mit $s_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{6} a_{i\sigma(i)}$. Es gibt nur ein $\sigma \in S_6$ mit $s_\sigma \neq 0$, nämlich $\sigma = (1 \;\; 6)$. Da σ eine Transposition ist, gilt laut Vorlesung $\operatorname{sgn}(\sigma) = -1$, und wir erhalten $\det(B) = s_\sigma = (-1) \cdot \prod_{i=1}^{6} 1 \quad = \quad -1$.

Name: _____

Aufgabe 8. (2+6+2 Punkte)

(a) Sei K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Was bedeutet es nach Definition, dass ϕ diagonalisierbar ist?

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{R}}$, und für jeden Eigenwert einen zugehörigen Eigenvektor.

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -6 & -8 \\ -4 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(c) Ist die Matrix A diagonalisierbar? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung:

zu (a) Es bedeutet, dass eine geordnete Basis $\mathscr{B}$ von V existiert, so dass die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}(\phi)$ eine Diagonalmatrix ist.

zu (b) Das charakteristische Polynom der Matrix A ist gegeben durch

$$\chi_A \quad = \quad \det(xE_3 - A) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -7 & x+6 & 8 \\ 4 & -4 & x-6 \end{pmatrix} \quad =$$

$$(x-1)(x+6)(x-6) + 0 + 0 - 0 - (-4) \cdot 8 \cdot (x-1) - 0 \quad =$$

$$(x-1)(x^2-36) + 32x - 32 \quad = \quad x^3 - x^2 - 36x + 36 + 32x - 32 \quad = \quad x^3 - x^2 - 4x + 4.$$

Durch probeweises Einsetzen findet man die Nullstellen 1, 2 und -2. Also sind dies die drei Eigenwerte von A. Zugehörige Eigenvektoren bestimmen wir durch Berechnung der Kerne von $A - E_3$, $A - 2E_3$ und $A + 2E_3$. Die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 7 & -7 & -8 \\ -4 & 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} -7 & 7 & 8 \\ 4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

liefert den Eigenvektor $(1, 1, 0)$ zum Eigenwert 1. Entsprechend erhält man durch

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & -8 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & -8 \\ -4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -8 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

den Eigenvektor $(0, 1, -1)$ zum Eigenwert 2, und durch

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & -8 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & -4 & -8 \\ -4 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -8 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto$$

den Eigenvektor $(0, -2, 1)$ zum Eigenwert -2.

zu (c) Ja, die Matrix ist diagonlisierbar. Da das Polynom χ_A die drei Nullstellen 1, 2 und -2 besitzt und normiert vom Grad 3 ist, muss $\chi_A = (x-1)(x+2)(x-2)$ gelten. Insbesondere zerfällt A über $\mathbb{Q}$ in Linearfaktoren. Außerdem sind die Nullstellen alle einfach, für alle $\lambda \in \{1, \pm 2\}$ gilt also jeweils $1 \leq \mu_g(A, \lambda) \leq \mu_a(A, \lambda) = 1$, also $\mu_g(A, \lambda) = \mu_a(A, \lambda) = 1$. Damit sind alle Voraussetzungen des Diagonalisierbarkeitskriteriums aus der Vorlesung erfüllt.