LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN

MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2022
9. August 2022

Lineare Algebra

(Lehramt Gymnasium)

Nachholklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❏ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten befinden sich auf dem Papierstreifen, der an die Klausur angeheftet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_{11}$ mit 11 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \bar{9}x_1 & + & \bar{7}x_2 & + & x_3 & = & \bar{5} \\ \bar{8}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{4}x_3 & = & \bar{6} \\ x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & x_3 & = & \bar{1}. \end{array}$$

Bestimmen Sie zwei verschiedene Lösungen dieses LGS im $\mathbb{F}_{11}^3$.

Lösung:
Wir wenden den Gauß-Algorithmus auf die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS an.

$$\begin{pmatrix} \bar{9} & \bar{7} & \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{8} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{6} \\ \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{9} & \bar{7} & \bar{1} & \bar{5} \\ \bar{8} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{6} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{7} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{7} & \bar{9} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{3} & \bar{7} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{7} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{7} & \bar{9} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix entspricht dem LGS $x_1 = \bar{7} + \bar{9}x_3$, $x_2 = \bar{9} + \bar{4}x_3$. Durch Setzen von $x_3 = \bar{0}$ bzw. $x_3 = \bar{1}$ erhalten wir die beiden Lösungen ${}^{\mathrm{t}}(\bar{7}\ \bar{9}\ \bar{0})$ und ${}^{\mathrm{t}}(\bar{5}\ \bar{2}\ \bar{1})$.

Name: _____

Aufgabe 2. (5+2+3 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \bar{6}\}$ der Restklassenring modulo 7.

(a) Geben Sie für jedes Element $a \in R$ jeweils einen Kehrtwert a^{-1} an, sofern dieser existiert.

(b) Ist R ein Körper? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist durch $a \sim b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Geben Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Äquivalenzklasse $[a]$ von a bezüglich $\sim$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ an. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich. (Dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist, braucht ebenfalls nicht gezeigt werden.)

Lösung:

zu (a) Auf Grund der Gleichungen $\bar{1} \cdot \bar{1} = \bar{1}$, $\bar{2} \cdot \bar{4} = \bar{8} = \bar{1}$, $\bar{3} \cdot \bar{5} = \overline{15} = \bar{1}$, $\bar{6} \cdot \bar{6} = \overline{36} = \bar{1}$ gilt $\bar{1}^{-1} = \bar{1}$, $\bar{2}^{-1} = \bar{4}$, $\bar{3}^{-1} = \bar{5}$, $\bar{4}^{-1} = \bar{2}$, $\bar{5}^{-1} = \bar{3}$ und $\bar{6}^{-1} = \bar{6}$. Das Element $\bar{0}$ hat in R keinen Kehrwert, denn für alle $a \in R$ gilt $\bar{0} \cdot a = \bar{0}$; es gibt kein $a \in R$ mit $\bar{0} \cdot a = \bar{1}$.

zu (b) Nach Teil (a) besitzt jedes Element in $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ außer $\bar{0}$ ein Inverses. Also ist $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ ein Körper. (In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper ist, wenn n eine Primzahl ist.)

zu (c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes $b \in \mathbb{R}$ die Äquivalenz

$$b \in [a] \quad \Leftrightarrow \quad b \sim a \quad \Leftrightarrow \quad b^2 = a^2 \quad \Leftrightarrow \quad b^2 - a^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (b-a)(b+a) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b \in \{\pm a\}.$$

Es gilt also $[a] = \{\pm a\}$ für alle $a \in \mathbb{R}$. (Die Menge besteht aus genau einem Element, wenn $a = 0$ ist, ansonsten aus genau zwei Elementen.)

Name: _____

Aufgabe 3. (4+2+4 Punkte)

Sei $V = \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a + b = d \right\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

(b) Geben Sie die Dimensionen von V und U an. Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

(c) Wie in der Vorlesung betrachten wir $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : V \to \mathbb{C} \quad , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto c + i(d - a - b)$$

eine lineare Abbildung ist, und dass U mit dem Kern $\ker(\phi)$ von ϕ übereinstimmt.

Lösung:

zu (a) Die Gleichung $0 + 0 = 0$ zeigt, dass die Nullmatrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ in U enthalten ist.
Seien nun $A, A_1 \in U$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist $A + A_1 \in U$ und $\lambda A \in U$. Wegen $A, A_1 \in U$ gibt es $a, b, d, a_1, b_1, d_1 \in \mathbb{R}$ mit $a + b = d$, $a_1 + b_1 = d_1$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & d_1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$A + A_1 = \begin{pmatrix} a + a_1 & b + b_1 \\ 0 & d + d_1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a & \lambda b \\ 0 & \lambda d \end{pmatrix}.$$

Wegen $(a + a1) + (b + b_1) = (a + b) + (a_1 + b_1) = d + d_1$ und $\lambda a + \lambda b = \lambda(a + b) = \lambda d$ folgt $A + A_1 \in U$ und $\lambda A \in U$.

zu (b) Der $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ der reellen 2×2-Matrizen ist 4-dimensional (denn laut Vorlesung bilden die Basismatrizen eine Basis bestehend aus $2 \cdot 2 = 4$ Elementen). Außerdem ist $\dim U = 2$. (Intuitiv kann sich das dadurch klar machen, dass die Matrix bereits durch die zwei Einträge a und b festgelegt ist. Eine präzise Begründung erhält man, indem man den Dimensionssatz für lineare Abbildungen auf die lineare Abbildung ϕ aus Teil (c) anwendet. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass ϕ surjektiv ist, und bekanntlich ist $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum 2-dimensional. Daraus folgt $\dim U = \dim \ker(\phi) = \dim V - \dim \operatorname{im}(\phi) = 4 - \dim \mathbb{C} = 4 - 2 = 2$.)

zu (c) Seien $A, B \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Um zu zeigen, dass ϕ eine lineare Abbildung ist, müssen wir $\phi(A + B) = \phi(A) + \phi(B)$ und $\phi(\lambda A) = \lambda \phi(A)$ nachweisen. Bezeichnen wir die Einträge von A und B wie üblich mit a_{ij} und b_{ij} $(1 \le i, j \le 2)$, dann gilt

$$\begin{aligned} \phi(A + B) \quad &= \quad \phi\left(\begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix} \right) \quad = \quad (a_{21} + b_{21}) + i((a_{22} + b_{22}) - (a_{11} + b_{11}) - (a_{12} + b_{12})) \\ &= \quad (a_{21} + i(a_{22} - a_{11} - a_{12})) + (b_{21} + i(b_{22} - b_{11} - b_{12})) \quad = \quad \phi(A) + \phi(B) \end{aligned}$$

und

$$\phi(\lambda A) \quad = \quad \phi\left(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \lambda a_{21} + i(\lambda a_{22} - \lambda a_{11} - \lambda a_{12}) \quad = \quad \lambda(a_{21} + i(a_{22} - a_{11} - a_{12}))$$

$$= \quad \lambda\phi(A).$$

Außerdem gilt für jedes $A \in V$ die Äquivalenz

$$A \in \ker(\phi) \quad \Leftrightarrow \quad \phi(A) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a_{21} + i(a_{22} - a_{11} - a_{12}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (a_{21} = 0) \wedge (a_{22} - a_{11} - a_{12} = 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \wedge (a_{22} = a_{11} + a_{12}) \quad \Leftrightarrow \quad A \in U.$$

Damit ist $\ker(\phi) = U$ nachgewiesen.

Name: _____

Aufgabe 4. (3+7 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die dreielementige Teilmenge

$$S \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Geben Sie $\mathrm{lin}(S)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ an. Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

(b) Geben Sie eine zweielementige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^3$ an, die linear unabhängig ist und die Gleichung $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{lin}(T)$ erfüllt, und weisen Sie diese beiden Eigenschaften nach.

Lösung:

zu (a) Es gilt

$$\mathrm{lin}(S) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ a \end{pmatrix} \ \middle| \ a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

zu (b) Eine Teilmenge mit den beiden angegebenen Eigenschaften ist

$$T \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ , \ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{vorgegeben.}$$

Dann folgt

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \mu & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda = \mu = 0.$$

Damit ist die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen. Für die Gleichung $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{lin}(T)$ genügt es laut Vorlesung, die Inklusionen $S \subseteq \mathrm{lin}(T)$ und $T \subseteq \mathrm{lin}(S)$ zu überprüfen. Die zweite Inklusion erhält man direkt wegen $T \subseteq S \subseteq \mathrm{lin}(S)$. Die erste Inklusion ist erfüllt, weil neben ${}^{\mathrm{t}}(1\ 0\ 1), {}^{\mathrm{t}}(0\ 1\ 0) \in T \subseteq \mathrm{lin}(T)$ auch der Vektor

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \quad = \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

in $\mathrm{lin}(T)$ enthalten ist.

Name: _____

Aufgabe 5. (6+4 Punkte)

(a) Sei U ein zwei- und W ein dreidimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^5$. Zeigen Sie mit Hilfe des Schnittdimensionssatzes: Existiert ein Vektor $v \neq 0_{\mathbb{R}^5}$ in $U \cap W$, dann existiert auch ein Vektor $v' \in \mathbb{R}^5$ mit der Eigenschaft, dass für kein $u \in U$ und kein $w \in W$ die Gleichung $v' = u + w$ erfüllt ist.

(b) Begründen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass es keine surjektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gibt.

Lösung:

zu (a) Der Nullvektor $0_{\mathbb{R}^5}$ ist im Untervektorraum $U \cap W$ enthalten. Auf Grund der Voraussetzung gilt darüber hinaus $\{0_{\mathbb{R}^5}\} \subsetneq U \cap W$ und somit $\dim(U \cap W) \geq 1$. Der Schnittdimensionssatz liefert $\dim(U + W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W) = 2+3-\dim(U \cap W) \leq 2+3-1 = 4$. Daraus folgt $U + W \subsetneq \mathbb{R}^5$, denn andernfalls wäre $\dim(U + W) = \dim \mathbb{R}^5 = 5$. Es gibt also einen Vektor $v' \in \mathbb{R}^5$, der nicht in $U + W$ enthalten ist. Für diesen existieren keine Vektoren $u \in U$ und $w \in W$ mit $v' = u + w$.

zu (b) Angenommen, $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ist eine surjektive lineare Abbildung. Auf Grund der Dimensionssatzes für lineare Abbildung müsste dann $2 = \dim \mathbb{R}^2 = \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi) = \dim \ker(\phi) + \dim \mathbb{R}^3 = \dim \ker(\phi) + 3 \geq 3$ gelten, im Widerspruch zu $2 < 3$.

Name: _____

Aufgabe 6. (6+4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{C}^2$ und $W = \mathbb{R}^2$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass nicht nur W, sondern auch V die Struktur eines $\mathbb{R}$-Vektorraums besitzt. Durch $\mathscr{A} = (e_1, ie_1, e_2, ie_2)$ ist eine geordnete Basis von V und durch $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ eine geordnete Basis von W definiert (wobei e_1, e_2 die Einheitsvektoren in $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{R}^2$ bezeichnen).

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\phi)$ der linearen Abbildung

$$\phi : V \to W \quad , \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(v_1) + 3\,\mathrm{Im}(v_2) \\ -\mathrm{Im}(v_1) + 2\,\mathrm{Re}(v_2) \end{pmatrix}$$

bezüglich der geordneten Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$.

(b) Sei nun $\psi : V \to W$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\psi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Bilder $\psi(e_1)$, $\psi(ie_2)$ und $\psi((3+i)e_1 + (4-i)e_2)$.

Lösung:

zu (a) Gemäß dem Verfahren aus der Vorlesung wenden wir ϕ auf die Elemente von $\mathscr{A}$ an und stellen die Bilder als Linearkombinationen von $\mathscr{B}$ dar. Es gilt

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 + 3 \cdot 0 \\ -0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 + 3 \cdot 0 \\ -1 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad = \quad 0 \cdot e_1 + (-1) \cdot e_2$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 + 3 \cdot 0 \\ -0 + 2 \cdot 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad = \quad 0 \cdot e_1 + 2 \cdot e_2$$

$$\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}\right) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 + 3 \cdot 1 \\ -0 + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad = \quad 3 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2$$

Die gesuchte Darstellungsmatrix ist also gegeben durch

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\phi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

zu (b) An den Spalten von $\mathscr{M}_{\mathscr{B}}^{\mathscr{A}}(\psi)$ kann $\psi(e_1) = {}^{\mathrm{t}}(1\ 5)$, $\psi(ie_1) = {}^{\mathrm{t}}(2\ 6)$, $\psi(e_2) = {}^{\mathrm{t}}(3\ 7)$ und $\psi(ie_2) = {}^{\mathrm{t}}(4\ 8)$ abgelesen werden. Auf Grund der Linearität von ψ gilt

$$\psi((3+i)e_1 + (4-i)e_2) \quad = \quad \psi(3e_1 + ie_1 + 4e_2 + (-1)ie_2) \quad = \quad 3\psi(e_1) + \psi(ie_1) + 4\psi(e_2) + (-1)\psi(ie_2)$$

$$= \quad 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 13 \\ 41 \end{pmatrix}.$$

Name: _____

Aufgabe 7. (5+2+3 Punkte)

(a) Berechen Sie die Determinante der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Bei dieser Teilaufgabe ist besonders wichtig, dass Sie einen kleinschrittigen, gut nachvollziehbaren Rechenweg angeben.)

(b) Sei $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ die lineare Abbildung gegeben durch $\phi(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^5$. Verwenden Sie die Determinante zur Bestimmung der Dimension des Kerns $\ker(\phi)$ und der Dimension des Bildes $\mathrm{im}(\phi)$ von ϕ.

(c) Nach der Leibniz-Formel ist die Determinante von A gegeben durch

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_5} s_\sigma \quad \text{mit} \quad s_\sigma = \mathrm{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} a_{5\sigma(5)} \quad ,$$

wobei a_{ij} jeweils den Eintrag von A an der Stelle (i, j) bezeichnet, für $1 \leq i, j \leq 5$. Geben Sie eine Permutation $\sigma \in S_5$ mit $s_\sigma \neq 0$ an (in Zykel- oder in Tabellenschreibweise). Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

Lösung:
zu (a)

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= (-1)(0 + 0 + 0 - (-1) - 0 - 0) = -1.$$

zu (b) Wegen $\det(A) \neq 0$ ist die Matrix invertierbar, und daraus folgt laut Vorlesung, dass die Abbildung $\phi = \mathscr{L}_{\mathscr{E}}^{\mathscr{E}}(A)$ bijektiv ist. Aus der Injektivität folgen $\ker(\phi) = \{0_{\mathbb{R}^5}\}$ und $\dim \ker(\phi) = 0$. Auf Grund der Surjektivität gilt $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{R}^5$ und somit $\dim \mathrm{im}(\phi) = 5$.

zu (c) Eine Permutation mit der gesuchten Eigenschaft ist gegeben durch

$$\sigma \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad (1\ 5)(2\ 4).$$

Als Produkt von zwei Transpositionen hat σ positives Signum, und folglich gilt $s_\sigma = a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}a_{3\sigma(3)}a_{4\sigma(4)}a_{5\sigma(5)} = a_{15}a_{24}a_{33}a_{42}a_{51} = (-1)^5 = -1$.

Name: _____

Aufgabe 8. (2+3+5 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{Q}}$.

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$ von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(c) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert einen zugehörigen Eigenvektor.

Lösung:
zu (a)

$$\chi_A \quad = \quad \det(xE_3 - A) \quad = \quad \det \begin{pmatrix} x-5 & 3 & -3 \\ 2 & x-1 & 0 \\ 8 & -5 & x+4 \end{pmatrix} \quad =$$

$$(x-5)(x-1)(x+4) + 3 \cdot 0 \cdot 8 + (-3) \cdot 2 \cdot (-5) - (-3) \cdot (x-1) \cdot 8 - 3 \cdot 2 \cdot (x+4) - (x-5) \cdot 0 \cdot (-5) \quad =$$

$$(x-5)(x^2+3x-4) + 0 + 30 - (-24x+24) - (6x+24) - 0 \quad =$$

$$x^3 - 2x^2 - 19x + 20 + 30 + 18x - 48 \quad = \quad x^3 - 2x^2 - x + 2$$

zu (b) Durch Einsetzen findet man die Nullstelle 1 von χ_A. Polynomdivision liefert $\chi_A = (x-1)(x^2-x-2)$. Mit der p-q-Formel (angewendet auf $p = -1$ und $q = -2$) erhält man die Nullstellen -1 und 2 des quadratischen Faktors. Insgesamt sind also -1, 1 und 2 die Eigenwerte der Matrix A.

zu (c) Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus bestimmen wir jeweils ein Element im Kern der Matrizen $A + E_3$, $A - E_3$ und $A - 2E_3$.

$$\begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & 0 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 3 \\ -8 & 5 & -3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die beiden Zeilen ungleich null entsprechen den Gleichungen $x_1 = -x_3$ und $x_2 = -x_3$. Durch Setzen von $x_3 = 1$ erhalten wir den Eigenvektor ${}^{\mathrm{t}}(-1 \ -1 \ 1)$.

$$\text{Probe:} \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad = \quad (-1) \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & 3 \\ -2 & 0 & 0 \\ -8 & 5 & -5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 3 \\ -8 & 5 & -5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Her kann an der Matrix entsprechend der Eigenvektor ${}^{\mathrm{t}}(0\,1\,1)$ abgelesen werden.

$$\text{Probe:} \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & -6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ -8 & 5 & -6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Hier erhalten wir den Eigenvektor $(-\frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\,1)$, den wir auf $(-1\,2\,3)$ skalieren, um die Brüche loszuwerden.

$$\text{Probe:} \quad \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$