Dr. Ralf Gerkmann

Sommersemester 2022
9. August 2022

Lineare Algebra

(Lehramt Gymnasium)

Nachholklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik
- ❏ Bachelor Informatik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten befinden sich auf dem Papierstreifen, der an die Klausur angeheftet ist.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hinweise:

(a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.

(b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.

(c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

(g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Wir betrachten über dem Körper $\mathbb{F}_{11}$ mit 11 Elementen das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} \bar{9}x_1 & + & \bar{7}x_2 & + & x_3 & = & \bar{5} \\ \bar{8}x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & \bar{4}x_3 & = & \bar{6} \\ x_1 & + & \bar{3}x_2 & + & x_3 & = & \bar{1}. \end{array}$$

Bestimmen Sie zwei verschiedene Lösungen dieses LGS im $\mathbb{F}_{11}^3$.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (5+2+3 Punkte)

Sei $R = \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, ..., \bar{6}\}$ der Restklassenring modulo 7.

(a) Geben Sie für jedes Element $a \in R$ jeweils einen Kehrtwert a^{-1} an, sofern dieser existiert.

(b) Ist R ein Körper? Bitte begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Auf der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen ist durch $a \sim b \Leftrightarrow a^2 = b^2$ eine Äquivalenzrelation $\sim$ definiert. Geben Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ die Äquivalenzklasse $[a]$ von a bezüglich $\sim$ als Teilmenge von $\mathbb{R}$ an. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich. (Dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}$ ist, braucht ebenfalls nicht gezeigt werden.)

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (4+2+4 Punkte)

Sei $V = \mathscr{M}_{2,\mathbb{R}}$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix} \in V \;\middle|\; a + b = d \right\}$$

ein Untervektorraum von V ist.

(b) Geben Sie die Dimensionen von V und U an. Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

(c) Wie in der Vorlesung betrachten wir $\mathbb{C}$ als zweidimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\phi : V \to \mathbb{C} \quad , \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto c + i(d - a - b)$$

eine lineare Abbildung ist, und dass U mit dem Kern $\ker(\phi)$ von ϕ übereinstimmt.

Name: ____

Aufgabe 4. (3+7 Punkte)

Wir betrachten im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die dreielementige Teilmenge

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Geben Sie $\mathrm{lin}(S)$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ an. Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.

(b) Geben Sie eine zweielementige Teilmenge $T \subseteq \mathbb{R}^3$ an, die linear unabhängig ist und die Gleichung $\mathrm{lin}(S) = \mathrm{lin}(T)$ erfüllt, und weisen Sie diese beiden Eigenschaften nach.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (6+4 Punkte)

(a) Sei U ein zwei- und W ein dreidimensionaler Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums $\mathbb{R}^5$. Zeigen Sie mit Hilfe des Schnittdimensionssatzes: Existiert ein Vektor $v \neq 0_{\mathbb{R}^5}$ in $U \cap W$, dann existiert auch ein Vektor $v' \in \mathbb{R}^5$ mit der Eigenschaft, dass für kein $u \in U$ und kein $w \in W$ die Gleichung $v' = u + w$ erfüllt ist.

(b) Begründen Sie mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, dass es keine surjektive lineare Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gibt.

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (6+4 Punkte)

Sei $V = \mathbb{C}^2$ und $W = \mathbb{R}^2$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass nicht nur W, sondern auch V die Struktur eines $\mathbb{R}$-Vektorraums besitzt. Durch $\mathscr{A} = (e_1, ie_1, e_2, ie_2)$ ist eine geordnete Basis von V und durch $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ eine geordnete Basis von W definiert (wobei e_1, e_2 die Einheitsvektoren in $\mathbb{C}^2$ bzw. $\mathbb{R}^2$ bezeichnen).

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $\mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\phi)$ der linearen Abbildung

$$\phi : V \to W \quad , \quad \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \mathrm{Re}(v_1) + 3\,\mathrm{Im}(v_2) \\ -\mathrm{Im}(v_1) + 2\,\mathrm{Re}(v_2) \end{pmatrix}$$

bezüglich der geordneten Basen $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$.

(b) Sei nun $\psi : V \to W$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung mit der Darstellungsmatrix

$$\mathscr{M}^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}(\psi) \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Bilder $\psi(e_1)$, $\psi(ie_2)$ und $\psi((3+i)e_1 + (4-i)e_2)$.

Name: ______________________________

Aufgabe 7. (5+2+3 Punkte)

(a) Berechen Sie die Determinante der folgenden Matrix über dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Bei dieser Teilaufgabe ist besonders wichtig, dass Sie einen kleinschrittigen, gut nachvollziehbaren Rechenweg angeben.)

(b) Sei $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ die lineare Abbildung gegeben durch $\phi(v) = Av$ für alle $v \in \mathbb{R}^5$. Verwenden Sie die Determinante zur Bestimmung der Dimension des Kerns $\ker(\phi)$ und der Dimension des Bildes $\operatorname{im}(\phi)$ von ϕ.

(c) Nach der Leibniz-Formel ist die Determinante von A gegeben durch

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_5} s_\sigma \quad \text{mit} \quad s_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} a_{3\sigma(3)} a_{4\sigma(4)} a_{5\sigma(5)} \quad ,$$

wobei a_{ij} jeweils den Eintrag von A an der Stelle (i, j) bezeichnet, für $1 \leq i, j \leq 5$. Geben Sie eine Permutation $\sigma \in S_5$ mit $s_\sigma \neq 0$ an (in Zykel- oder in Tabellenschreibweise). Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (2+3+5 Punkte)

Gegeben sei die folgende Matrix $A \in \mathscr{M}_{3,\mathbb{Q}}$.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -8 & 5 & -4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie das charakteristische Polynom $\chi_A \in \mathbb{Q}[x]$ von A.

(b) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(c) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert einen zugehörigen Eigenvektor.