Lösung Globalübungsblatt 9

Aufgabe 1

zu (a) Erinnerung Basisauswahlverfahren

geg.: Vektoren $v_1, \dots, v_s \in K^m$ $(m, s \in \mathbb{N})$

gesucht: Basis von $U = \text{lin}\{v_1, \dots, v_s\}$

Vorgehensweise:
- trage $v_1, \dots, v_s$ als Spalten in eine Matrix $A \in M_{m \times s, K}$ ein
- erhalte durch Anwendung des Gauß-Algorithmus eine Matrix in ZSF mit Kennzahlen $r, j_1, \dots, j_r$
- Es ist dann $\{v_{j_1}, \dots, v_{j_r}\}$ eine Basis von U

Sei $a \in \mathbb{R}$. Wende dieses Verfahren auf die Spalten $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ von M_a an. Es gilt $SR(M_a) = \text{lin}\{v_1, v_2, v_3\}$ nach Def. des Spaltenraums.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & a & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1-2a \end{pmatrix} =: \tilde{M}_a$$

Es gilt $1 - 2a = 0 \iff a = \frac{1}{2}$.

1. Fall: $a \neq \frac{1}{2}$ Dann ist $\tilde{M}_a$ eine Matrix in ZSF mit Kennzahlen $r = 3$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$. $\Rightarrow \{v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}\} = \{v_1, v_2, v_3\}$
$= \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ a \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis des Spaltenraums und
$\text{rg}(M_a) = \dim SR(M_a) = 3$.

2. Fall: $a = \frac{1}{2}$ Dann liegt $\tilde{M}_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ebenfalls in ZSF vor, mit Kennzahlen $r = 2$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$.

$\Rightarrow \{v_{j_1}, v_{j_2}\} = \{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $SR(M_{\frac{1}{2}})$

$rg(M_{\frac{1}{2}}) = \dim SR(M_{\frac{1}{2}}) = 2$.

zu (b) Für jede Matrix $B \in \mathcal{M}_{m \times n, K}$ (K Körper, $m, n \in \mathbb{N}$) gilt lt. Vorlesung $rg(B) + \dim \ker(B) = n$.

Hier: Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ gilt $\dim \ker(M_a) = 3 - rg(M_a)$
$= 3 - 3 = 0$. $\Rightarrow \ker(M_a) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$, $\emptyset$ ist Basis von $\ker(M_a)$

$\ker(M_{\frac{1}{2}}) = 3 - rg(M_{\frac{1}{2}}) = 3 - 2 = 1$

Nach Def. ist $\ker(M_{\frac{1}{2}})$ die Lösungsmenge des homogenen LGS $M_{\frac{1}{2}} x = 0_{\mathbb{R}^3}$. Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ haben wir durch Anwendung des Gauß-Alg. auf $M_{\frac{1}{2}}$ gewonnen, an ihr kann somit die Lösungsmenge abgelesen werden.

$S = \{1, 2, 3\} \setminus \{j_1, j_2\} = \{3\}$, Basisvektor $b_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $\ker(M_{\frac{1}{2}})$

(Probe: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$)

Aufgabe 2

z.zg.: Äquivalenz der Aussagen

(i) $rg(A) = rg(A^2)$ (ii) $SR(A) = SR(A^2)$

(iii) $\dim \ker(A) = \dim \ker(A^2)$

(iv) $\ker(A) = \ker(A^2)$

Zunächst zeigen wir (1) $SR(A^2) \subseteq SR(A)$ (2) $\ker(A^2) \supseteq \ker(A)$

zu (1) Lt. Vorlesung gilt $SR(A) = im(\phi_A)$, wobei $\phi_A : K^n \to K^n$ geg. ist durch $\phi_A(v) = Av \ \forall v \in K^n$. ebenso: $SR(A^2) = im(\phi_{A^2})$

z.zg.: $im(\phi_{A^2}) \subseteq im(\phi_A)$ Sei also $w \in im(\phi_{A^2})$. $\Rightarrow$

$\exists v \in K^n$ mit $w = \phi_{A^2}(v) \Rightarrow w = A^2 v = A(Av) \Rightarrow$

$w \in im(\phi_A)$

zu (2) Sei $v \in \ker(A)$. $\Rightarrow Av = 0_{K^n} \Rightarrow A^2 v = A(Av)$

$= A \cdot 0_{K^n} = 0_{K^n} \Rightarrow v \in \ker(A^2)$

„(i) $\Rightarrow$ (ii)" Vor.: $rg(A) = rg(A^2) \Rightarrow$

$\dim SR(A) = \dim SR(A^2)$ z.zg.: $SR(A) = SR(A^2)$

Wie oben gezeigt, gilt $SR(A^2) \subseteq SR(A)$. Zusammen mit $\dim SR(A) = \dim SR(A^2)$ folgt daraus $SR(A) = SR(A^2)$.

„(ii) $\Rightarrow$ (iii)" Aus der Vor. folgt $rg(A) = \dim SR(A) = \dim SR(A^2) = rg(A^2)$. Dimensionssatz für lineare Abb.

$\Rightarrow \dim \ker(A^2) = n - rg(A^2) = n - rg(A) = \dim \ker(A)$

„(iii) $\Rightarrow$ (iv)" Wie oben gezeigt, gilt $\ker(A) \subseteq \ker(A^2)$. Zusammen mit der Voraussetzung $\dim \ker(A) = \dim \ker(A^2)$ folgt daraus $\ker(A) = \ker(A^2)$.

„(iv) $\Rightarrow$ (i)" Aus der Vor. folgt $\dim \ker(A) = \dim \ker(A^2)$. Dimensionssatz für lin. Abb. $\Rightarrow$ $rg(A) = n - \dim \ker(A) = n - \dim \ker(A^2) = rg(A^2)$ $\square$

Aufgabe 3

__geg.:__ K- Vektorraum V der endlichen Dimension n

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis, $v \in V$

Vorgehensweise bei der Berechnung von $\Phi_{\mathcal{B}}(v) \in K^n$:

- Stelle v als Linearkombination von $\mathcal{B}$ dar, d.h. bestimmte $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ mit $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$.
- Es gilt $\Phi_{\mathcal{B}}(v) = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

__zu (a)__ $V = M_{2,\mathbb{R}}$, $\mathcal{B} = (A_1, A_2, A_3, A_4)$

$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

gesucht: $\Phi_{\mathcal{B}}(B + nC)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$,
$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Phi_{\mathcal{B}} : M_{2,\mathbb{R}} \to \mathbb{R}^4$ ist lineare Abb. $\Rightarrow \Phi_{\mathcal{B}}(B + nC) =$
$\Phi_{\mathcal{B}}(B) + n\,\Phi_{\mathcal{B}}(C) \Rightarrow$ genügt, $\Phi_{\mathcal{B}}(B)$ und $\Phi_{\mathcal{B}}(C)$ zu bestimmen

Für alle $\lambda_1, \dots, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = B \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 & 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 \\ 3\lambda_3 + 3\lambda_4 & 4\lambda_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 2\lambda_4 = 3\lambda_3 + 3\lambda_4 = 4\lambda_4 = 1 \quad (*_1)$$

ebenso: $\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4 = C \iff$

$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 2\lambda_4 = 3\lambda_3 + 3\lambda_4 = 0, \quad 4\lambda_4 = 1 \quad (*2)$

Löse diese beiden LGS gleichzeitig mit dem Gaußverfahren.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ erstes LGS $\quad \uparrow$ zweites LGS

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{12} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $\Phi_{\mathcal{B}}(B) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right), \quad \Phi_{\mathcal{B}}(C) = \left(0, 0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$\Phi_{\mathcal{B}}(B + nC) = \Phi_{\mathcal{B}}(B) + n\,\Phi_{\mathcal{B}}(C) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{4}\right) + n\left(0, 0, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12} - \frac{1}{4}n, \frac{1}{4} + \frac{1}{4}n\right)$

__Bem.:__ Da wir inzwischen die Transformationsmatrizen zur Verfügung haben, wäre auch ein anderer Lösungsweg denkbar. Sei $\mathcal{A} = (B_{11}, B_{12}, B_{21}, B_{22})$ die Basis von $M_{2,\mathbb{R}}$ bestehend aus den Basismatrizen. Es ist

$A_1 = 1 \cdot B_{11} + 0 \cdot B_{12} + 0 \cdot B_{21} + 0 \cdot B_{22}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$= 1 \cdot B_{11} + 2 \cdot B_{12} + 0 \cdot B_{21} + 0 \cdot B_{22}$, und ebenso $A_3 = 1 \cdot B_{11} + 2 \cdot B_{12} + 3 \cdot B_{21} + 0 \cdot B_{22}$, $A_4 = 1 \cdot B_{11} + 2 \cdot B_{12} + 3 \cdot B_{21} + 4 \cdot B_{22}$. Jede dieser Gleichung liefert eine Spalte der Transformationsmatrix $J^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$, insgesamt erhalten wir

$$J^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Wir wenden das Verfahren zur Invertierung von $J^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}}$ an.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \longmapsto$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Es gilt also

$$J^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} = (J^{\mathcal{B}}_{\mathcal{A}})^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

Weiter gilt $B + nC = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & n+1 \end{pmatrix} = 1 \cdot B_{11} + 1 \cdot B_{12} + 1 \cdot B_{21} + (n+1) B_{22}$,

also $\Phi_{\mathcal{A}}(B + nC) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ n+1 \end{pmatrix}$. Mit der Transformationsmatrix erhalten wir

$$\Phi_{\mathcal{B}}(B + nC) = J^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} \Phi_{\mathcal{A}}(B + nC) = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{4}(n+1) \\ \frac{1}{4}(n+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{4}n - \frac{1}{12} \\ \frac{1}{4}n + \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

<u>zu (b)</u> $V = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, $\mathcal{B} = (e_1^*, e_2^*)$ wobei e_1^*, e_2^* geg.

durch $e_1^*(1,0) = 1$, $e_1^*(0,1) = 0$, $e_2^*(1,0) = 0$, $e_2^*(0,1) = 1$

$$\Big[\; e_1^*(4,8) = e_1^*(4 \cdot (1,0) + 8 \cdot (0,1)) \overset{e_1^* \text{ linear}}{=} 4\, e_1^*(1,0) + 8 \cdot e_1^*(0,1)$$
$$= 4 \cdot 1 + 8 \cdot 0 = 4, \text{ genauso: } e_2^*(4,8) = 8 \;\Big]$$

$f \in V$ geg durch $f(2,3) = 8$, $f(-1,7) = -2$

gesucht: $\Phi_{\mathcal{B}}(f)$

Gesucht werden also $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $f = \lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^*$.

$f(2,3) = 8 \iff (\lambda_1 e_1^* + \lambda_2 e_2^*)(2,3) = 8 \iff$

$\lambda_1 e_1^*(2,3) + \lambda_2 e_2^*(2,3) = 8 \iff$

$\lambda_1 e_1^*(2 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)) + \lambda_2 e_2^*(2 \cdot (1,0) + 3 \cdot (0,1)) = 8 \iff$

$\lambda_1 (2 \cdot e_1^*(1,0) + 3 \cdot e_1^*(0,1)) + \lambda_2 (2 \cdot e_2^*(1,0) + 3 \cdot e_2^*(0,1)) = 8$

$\iff \lambda_1 (2 \cdot 1 + 3 \cdot 0) + \lambda_2 (2 \cdot 0 + 3 \cdot 1) = 8$

$\iff 2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 8$

genauso: $f(-1,7) = -2 \Leftrightarrow -\lambda_1 + 7\lambda_2 = -2$

Löse das LGS $2\lambda_1 + 3\lambda_2 = 8$, $-\lambda_1 + 7\lambda_2 = -2$ mit dem Gaußverfahren

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -1 & 7 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 7 & -2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 2 & 3 & 8 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 0 & 17 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & -7 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{4}{17} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 62/17 \\ 0 & 1 & 4/17 \end{pmatrix}$$

Ergebnis: $\Phi_B(f) = \begin{pmatrix} 62/17 \\ 4/17 \end{pmatrix} = \frac{1}{17}\begin{pmatrix} 62 \\ 4 \end{pmatrix}$