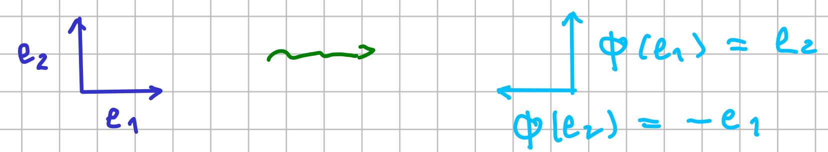
Lösung Globalübungsblatt 8

Aufgabe 3

$\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ 90° - Drehung

zu (a) $n = 2$



Darstellungsmatrix der 90° - Drehung

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E^{(2)}$$

$\phi(e_1)$ $\phi(e_2)$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ gerade, $n = 2m$ mit $m \in \mathbb{N}$. Definiere

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{matrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{matrix} \end{pmatrix}}_{m\ 2\times 2\text{-Blockmatrizen}} \Longrightarrow A^2 = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & & & \\ & -1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & -1 \\ & & & & -1 \end{pmatrix} = -E^{(2m)} = -E^{(n)}$$

zu (b) geg.: $n \in \mathbb{N}$, $+$ komponentenweise Addition auf $\mathbb{R}^n$

$A \in M_{n,\mathbb{R}}$ mit $A^2 = -E^{(n)}$, $* : \mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

definiert durch $(a+ib) * v = av + bAv \quad \forall a, b \in \mathbb{R}, \forall v \in \mathbb{R}^n$

Beh.: $(\mathbb{R}^n, +, *)$ ist ein $\mathbb{C}$-Vektorraum

$(\mathbb{R}^n, +)$ ist abelsche Gruppe (da bekanntlich $\mathbb{R}^n$ mit der komponentenweisen Addition und skalaren Mult. ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist).

Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ und $v, w \in \mathbb{R}^n$. zu überprüfen:

(i) $(\lambda + \mu) * v = \lambda * v + \mu * v$

(ii) $\lambda * (v + w) = \lambda * v + \lambda * w$

(iii) $\lambda * (\mu * v) = (\lambda \mu) * v$

(iv) $1 * v = v$

Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ geg. durch $\lambda = a + ib$, $\mu = c + id$.

<u>zu (i)</u> $(\lambda + \mu) * v = ((a+ib) + (c+id)) * v =$

$((a+c) + i(b+d)) * v = (a+c)v + (b+d)Av =$

$av + cv + bAv + dAv = (av + bAv) + (cv + dAv) =$

$(a+ib) * v + (c+id) * v = \lambda * v + \mu * v$

<u>zu (ii)</u> $\lambda * (v + w) = (a+ib) * (v+w) =$

$a(v+w) + bA(v+w) = av + aw + bAv + bAw =$

$av + bAv + aw + bAw = (a+ib) * v + (a+ib) * w$

$= \lambda * v + \lambda * w$

<u>zu (iii)</u> linke Seite: $\lambda * (\mu * v) = (a+ib) * ((c+id) * v)$

$= (a+ib)(cv + dAv) = a(cv + dAv) + bA(cv + dAv)$

$A^2 = -E^{(n)}$

$= acv + adAv + bcAv + bdA^2 v$

$= acv + adAv + bcAv - bdv = (ac - bd)v + (ad + bc)Av$

rechte Seite: $(\lambda \mu) * v = ((a+ib)(c+id)) * v =$

$((ac - bd) + i(bc + ad)) * v = (ac - bd)v + (bc + ad)Av$

insgesamt: $\lambda * (\mu * v) = (\lambda \mu) * v$

zu (iv) $1 * v = (1 + i \cdot 0) * v = 1 \cdot v + 0 \cdot Av = v$

zu (c) Sei $r \in \mathbb{N}_0$ die Dimension von $(\mathbb{R}^n, +, *)$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum und $\{v_1, \dots, v_r\}$ eine Basis.

Beh.: $\mathcal{B} = \{v_1, Av_1, \dots, v_r, Av_r\}$ ist eine $2r$-elementige Basis von $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

zu überprüfen: (i) $\mathbb{R}^n = \text{lin}(\mathcal{B})$

(ii) $|\mathcal{B}| = 2r$, und $\mathcal{B}$ ist linear unabhängig

zu (i) „$\supseteq$" klar, da $\mathcal{B} \subseteq \mathbb{R}^n$

„$\subseteq$" Sei $w \in \mathbb{R}^n$ vorgeg. z.zg.: $w \in \text{lin}(\mathcal{B})$

$\{v_1, \dots, v_r\}$ ist Erz.-system des $\mathbb{C}$-Vektorraums $(\mathbb{R}^n, +, *)$

$\Rightarrow \exists \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{C}$ mit $w = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i * v_i$

Schreibe $\lambda_j = a_j + i b_j$ mit $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, $1 \leq j \leq r$.

$\Rightarrow w = \sum (a_j + i b_j) * v_j = \sum_{j=1}^{r} (a_j v_j + b_j A v_j) \in \text{lin}(\mathcal{B})$

zu (ii) genügt z.zg.: $(v_1, Av_1, \dots, v_r, Av_r)$ ist ein linear unabhängiges Tupel

Seien $a_1, b_1, \dots, a_r, b_r \in \mathbb{R}$ mit

$$a_1 v_1 + b_1 A v_1 + \dots + a_r v_r + b_r A v_r = 0_{\mathbb{R}^n} \quad (\Delta)$$

z.zg.: $a_1 = b_1 = \dots = a_r = b_r$

$(\Delta) \Rightarrow (a_1 + i b_1) * v_1 + \dots + (a_r + i b_r) * v_r = 0_{\mathbb{R}^n}$

$\{v_1, \ldots, v_r\}$ ist linear unabhängig in $(\mathbb{R}^n, +, *)$ $\Rightarrow$ $a_j + i b_j = 0$ für $1 \leq j \leq r$

$\Rightarrow$ $a_j = b_j = 0$ für $1 \leq j \leq r$

also: B ist Basis von $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, $|B| = 2r$

$\Rightarrow$ $2r = \dim \mathbb{R}^n = n$ ($\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum)

$\Rightarrow$ n ist gerade, und die Dimension des $\mathbb{C}$-Vektorraums $(\mathbb{R}^n, +, *)$ ist gleich $r = \frac{1}{2} n$

<u>Bsp.:</u> $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis des $\mathbb{C}$-Vektorraums $(\mathbb{R}^2, +, *)$

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\lambda * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (a + ib) * \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$= a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Aufgabe 1

zu (a) Definiere $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}$.

Beh.: $\ker(\phi) = U \cap V$ Sei $v = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$. Dann gilt die Äquivalenz

$v \in \ker(\phi) \iff \phi(v) = 0_{\mathbb{R}} \iff \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ und $x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \iff$

$v \in U$ und $v \in V \iff v \in U \cap V$

Dimensionssatz für lineare Abb. $\Rightarrow \dim \mathbb{R}^4 = \dim \ker(\phi) + \dim \operatorname{im}(\phi)$

$\Rightarrow 4 = \dim(U \cap V) + \dim \operatorname{im}(\phi)$

$\phi\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\phi\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \in \operatorname{im}(\phi)$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ ist linear unabh. (da $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ kein skalares Vielf. von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder umgekehrt), besteht aus zwei Elementen

$\Rightarrow \dim \operatorname{im}(\phi) \geq 2 = \dim \mathbb{R}^2 \underset{\operatorname{im}(\phi) \subseteq \mathbb{R}^2}{\Rightarrow} \operatorname{im}(\phi) = \mathbb{R}^2$ (*)

$\Rightarrow \dim \operatorname{im}(\phi) = 2$ einsetzen $\Rightarrow 4 = \dim(U \cap V) + 2$

$\Rightarrow \dim(U \cap V) = 2$

(*) $U \subseteq V$, $\dim(U) = \dim(V)$
$\Rightarrow U = V$

zu (b) Für alle $v = (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$ gilt die Äquivalenz

$v \in U \cap V \iff \begin{matrix} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0 \end{matrix}$ Also ist $U \cap V$ die

Lösungsmenge des hom. LGS mit der Koeff.-matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Kennzahlen: $r = 2$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ $\Rightarrow$ $S = \{1,2,3,4\} \setminus \{1,2\} = \{3,4\}$

$b_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $b_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist Basis von $U \cap V$

<u>zu (c)</u>

$$\begin{array}{cccccc} \left(\begin{matrix} -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right) \\ \quad v_1 \quad v_2 \quad v_3 \quad v_4 \quad v_5 \quad v_6 \end{array} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Zeilenstufenform

Kennzahlen: $r = 4$

$j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$, $j_4 = 4$

Laut Vorlesung ist die gesuchte Basis geg. durch $\{v_{j_1}, v_{j_2}, v_{j_3}, v_{j_4}\}$

$= \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$

$= \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$

<u>Aufgabe 2</u> geg.: $W, W', W'' \leq \mathbb{R}^{10}$, $\dim W = \dim W' = \dim W'' = 8$

gesucht: alle Möglichkeiten für $\dim(W \cap W' \cap W'')$

Schnittdimensionssatz

$\dim(W \cap W' \cap W'') = \dim((W \cap W') \cap W'') =$

$\dim(W \cap W') + \dim W'' - \dim((W \cap W') + W'')$

obere Abschätzung von $\dim(W \cap W' \cap W'')$:

$W \cap W' \cap W'' \subseteq W \Rightarrow \dim(W \cap W' \cap W'') \leq 8$

untere Abschätzung von $\dim(W \cap W' \cap W'')$:

$(W \cap W') + W'' \subseteq \mathbb{R}^{10} \Rightarrow \dim((W \cap W') + W'') \leq \dim \mathbb{R}^{10} = 10$

$\Rightarrow \dim(W \cap W' \cap W'') = \dim(W \cap W') + 8 - \dim((W \cap W') + W'')$

$\geq \dim(W \cap W') + 8 - 10 = \dim(W \cap W') - 2$

Schnittdimensionssatz $\Rightarrow$

$\dim(W \cap W') = \dim W + \dim W' - \dim(W + W') \geq 8 + 8 - 10 = 6$

$\Rightarrow \dim(W \cap W' \cap W'') \geq 6 - 2 = 4$

Insgesamt: $\dim(W \cap W' \cap W'') \in \{4, 5, 6, 7, 8\}$

(i) Beispiel für $\dim(W \cap W' \cap W'') = 8$:

Setze $W = W' = W'' = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_8\} = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \mid x_9 = x_{10} = 0\}$

Dann gilt $\dim(W \cap W' \cap W'') = \dim W = 8$

$\uparrow$ $\{e_1, \dots, e_8\}$ 8-elementige Basis

(ii) Beispiel für $\dim(W \cap W' \cap W'') = 7$:

Setze $W = W' = \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_8\}$

$= \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \mid x_8 = x_{10} = 0\}$

$\Rightarrow W \cap W' \cap W'' = W \cap W'' = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \mid x_8 = x_9 = x_{10} = 0\}$

$= \operatorname{lin}\{e_1, \dots, e_7\} \Rightarrow \dim(W \cap W' \cap W'') = 7$

(iii) Beispiel für $\dim(W \cap W' \cap W'') = 6$:

Setze $W = W' = \text{lin}\{e_1, \dots, e_8\}$

$W'' = \text{lin}\{e_1, \dots, e_6, e_9, e_{10}\} = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \mid x_7 = x_8 = 0\}$

$\Rightarrow W \cap W' \cap W'' = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \mid x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0\}$

$= \text{lin}\{e_1, \dots, e_6\} \Rightarrow \dim(W \cap W' \cap W'') = 6$

(iv) Beispiel für $\dim(W \cap W' \cap W'') = 5$:

Setze $W = \text{lin}\{e_1, \dots, e_8\}$, $W' = \text{lin}\{e_1, \dots, e_6, e_9, e_{10}\}$ und

$W'' = \text{lin}\{e_1, \dots, e_5, e_8, e_9, e_{10}\} = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \mid x_6 = x_7 = 0\}$

$\rightarrow W \cap W' \cap W'' = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \mid x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0\}$

$= \text{lin}\{e_1, \dots, e_5\} \Rightarrow \dim(W \cap W' \cap W'') = 5$

(v) Beispiel für $\dim(W \cap W' \cap W'') = 4$:

Setze $W = \text{lin}\{e_1, \dots, e_8\}$, $W' = \text{lin}\{e_1, \dots, e_6, e_9, e_{10}\}$ und

$W'' = \text{lin}\{e_1, \dots, e_4, e_7, e_8, e_9, e_{10}\} = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \mid x_5 = x_6 = 0\}$

$\rightarrow W \cap W' \cap W'' = \{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \mid x_5 = x_6 = x_7 = x_8 = x_9 = x_{10} = 0\}$

$= \text{lin}\{e_1, \dots, e_4\} \Rightarrow \dim(W \cap W' \cap W'') = 4$