

Lineare Algebra

— Lösung Blatt 7 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Menge B muss linear unabhängig sein, und es muss $\text{lin}(B) = V$ gelten, die Menge B also ein Erzeugendensystem von V sein.

zu (b) Beides ist nicht möglich. Da B eine Basis ist, ist B laut Vorlesung zugleich ein minimales Erzeugendensystem von V . Damit kann A kein Erzeugendensystem, erst recht keine Basis von V sein. Außerdem ist B laut Vorlesung eine maximale linear unabhängige Teilmenge. Somit ist C keine linear unabhängige Menge, und damit auch keine Basis von V .

zu (c) Kein K -Vektorraum V besitzt sich selbst als Basis. Denn V enthält den Nullvektor 0_V , und laut Vorlesung ist jede Teilmenge von V , die den Nullvektor enthält, linear abhängig. Damit kann V erst recht keine Basis von V sein. Die leere Menge $\emptyset$ ist genau dann eine Basis von V , wenn $V = \{0_V\}$ gilt. Denn laut Vorlesung ist $\emptyset$ in jedem K -Vektorraum V linear unabhängig, und es gilt $\text{lin}(\emptyset) = \{0_V\}$.

Aufgabe 1

zu (a) Zunächst betrachten wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Wir müssen nachweisen, dass die Menge $S = \{1+i, 2-i\}$ ein Erzeugendensystem dieses Vektorraums und linear unabhängig ist. Für Letzteres seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda(1+i) + \mu(2-i) = 0$ vorgegeben. Zu zeigen ist $\lambda = \mu = 0$. Sortieren wir in der Gleichung nach Real- und Imaginärteil, so erhalten wir die $(\lambda + 2\mu) \cdot 1 + (\lambda - \mu) \cdot i = 0$. Weil laut Vorlesung die Menge $\{1, i\}$ linear unabhängig ist, folgt $\lambda + 2\mu = 0$ und $\lambda - \mu = 0$. Ziehen wir diese beiden Gleichungen voneinander ab, so ergibt sich $3\mu = 0$ und $\mu = 0$. Durch Einsetzen erhalten wir $\lambda + 2 \cdot 0 = 0$, also $\lambda = 0$.

Zum Beweis von $\text{lin}(S) = \mathbb{C}$ sei $z \in \mathbb{C}$ vorgegeben, $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$. Zu zeigen ist, dass Elemente λ, μ mit $\lambda(1+i) + \mu(2-i) = z$ existieren. Diese Gleichung ist äquivalent zu $(\lambda + 2\mu) + (\lambda - \mu)i = a + bi$, auf Grund der Eindeutigkeit von Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl also zu $\lambda + 2\mu = a$ und $\lambda - \mu = b$. Es gilt nun die Äquivalenz

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu = a) \wedge (\lambda - \mu = b) &\Leftrightarrow (3\mu = a - b) \wedge (\lambda - \mu = b) \Leftrightarrow \left(\mu = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) \wedge (\lambda - \mu = b) \\ &\Leftrightarrow \left(\mu = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) \wedge \left(\lambda - \frac{1}{3}a + \frac{1}{3}b = b\right) \Leftrightarrow \left(\mu = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b\right) \wedge \left(\lambda = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b\right). \end{aligned}$$

Setzen wir also $\mu = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b$ und $\lambda = \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b$, dann ist die Gleichung $\lambda(1+i) + \mu(2-i) = z$ erfüllt und somit z in $\text{lin}(S)$ enthalten.

Insgesamt ist die Menge $\{1+i, 2-i\}$ also eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Sie ist aber keine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$ -Vektorraum, denn sie ist nicht linear unabhängig: Es gilt $(-2+i)(1+i) + (1+i)(2-i) = 0$, aber $(-2+i, 1+i) \neq (0,0)$.

zu (b) Zunächst zeigen wir, dass $S = \{v + w, v + 2w\}$ linear unabhängig ist. Seien dazu $\lambda, \mu \in K$ mit $\lambda(v + w) + \mu(v + 2w) = 0_V$ vorgegeben. Diese Gleichung ist äquivalent zu $(\lambda + \mu)v + (\lambda + 2\mu)w = 0_V$. Weil auf Grund der Voraussetzungen das Tupel (v, w) linear unabhängig ist, folgt daraus $\lambda + \mu = 0$ und $\lambda + 2\mu = 0$. Subtraktion der ersten von der zweiten Gleichung ergibt $\mu = 0$, und Einsetzen liefert $\lambda + 0 = 0$, also $\lambda = 0$. Somit ist auch das Tupel $(v + w, v + 2w)$ linear unabhängig und damit $\{v + w, v + 2w\}$ eine (zweielementige) linear unabhängige Menge.

Nun muss noch $\text{lin}(S) = V$ gezeigt werden. Sei dazu $u \in V$ vorgegeben. Weil $\{v, w\}$ ein Erzeugendensystem von V ist, gibt es $\lambda, \mu \in K$ mit $u = \lambda v + \mu w$. Gesucht werden nun $\alpha, \beta \in K$ mit

$$\alpha(v + w) + \beta(v + 2w) = u = \lambda v + \mu w \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha + \beta)v + (\alpha + 2\beta)w = \lambda v + \mu w.$$

Diese Gleichung ist offenbar erfüllt, wenn $(\alpha + \beta = \lambda) \wedge (\alpha + 2\beta = \mu) \Leftrightarrow (\alpha + \beta = \lambda) \wedge (\beta = \mu - \lambda) \Leftrightarrow (\alpha + (\mu - \lambda) = \lambda) \wedge (\beta = \mu - \lambda) \Leftrightarrow (\alpha = 2\lambda - \mu) \wedge (\beta = \mu - \lambda)$ gilt. Setzen wir also $\alpha = 2\lambda - \mu$ und $\beta = \mu - \lambda$, dann folgt $\alpha(v + w) + \beta(v + 2w) = u$ und somit $u \in \text{lin}(S)$.

Aufgabe 2

zu (a) Elemente $(x_1, x_2, x_3) \in V$ erhält man dadurch, dass man x_1 und x_3 beliebig vorgibt und x_2 durch die Gleichung $x_2 = 2x_1 + 5x_3$ berechnet. So erhält man zum Beispiel die Elemente $v, w \in V$ gegeben durch $v = (1, 2, 0)$ und $w = (0, 5, 1)$. Wir zeigen, dass $B = \{v, w\}$ eine Basis von V ist. Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha v + \beta w = 0_V$ vorgegeben. Dann gilt

$$(0, 0, 0) = \alpha(1, 2, 0) + \beta(0, 5, 1) = (\alpha, 2\alpha + 5\beta, \beta).$$

Dies liefert die Gleichungen $\alpha = 0$, $2\alpha + 5\beta = 0$ und $\beta = 0$, wodurch die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen ist. Zum Nachweis von $V = \text{lin}(B)$ sei $(x_1, x_2, x_3) \in V$ vorgegeben. Dann gilt $2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0$, was zu $x_2 = 2x_1 + 5x_3$ umgestellt werden kann. Setzen wir $\alpha = x_1$ und $\beta = x_3$, dann erhalten wir

$$\alpha v + \beta w = x_1(1, 2, 0) + x_3(0, 5, 1) = (x_1, 2x_1 + 5x_3, x_3) = (x_1, x_2, x_3).$$

Dies zeigt, dass (x_1, x_2, x_3) in $\text{lin}(B)$ enthalten ist.

zu (b) Hier erhält man Elemente aus V dadurch, dass man die Einträge a, b, c der Matrix beliebig vorgibt und d durch die Gleichung $d = -a - b - c$ bestimmt. Auf diese Weise erhält man die Teilmenge $B = \{R, S, T\}$ von V gegeben durch

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien $\alpha, \beta, \gamma \in K$ mit $\alpha R + \beta S + \gamma T = 0_{\mathcal{M}_{2, \mathbb{R}}}$. Dann folgt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha - \beta - \gamma \end{pmatrix}$$

und durch Vergleich der Einträge erhalten wir die Gleichungen $\alpha = \beta = \gamma = -\alpha - \beta - \gamma = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen. Zum Nachweis von $\text{lin}(B) = V$ sei $A \in V$ mit den Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $a + b + c + d = 0$. Die Rechnung

$$aR + bS + cT = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a-b-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$$

zeigt, dass A in $\text{lin}(B)$ enthalten ist.

zu (c) Hier ist zu beachten, dass Linearkombinationen nur mit Koeffizienten aus $K = \mathbb{R}$ gebildet werden dürfen. Wir zeigen, dass $B = \{Q, R, S, T\}$ bestehend aus den Matrizen

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$$

eine Basis von V ist. Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit seien $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha Q + \beta R + \gamma S + \delta T = 0_{\mathcal{M}_{2,\mathbb{C}}}$. Die Rechnung

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + i\beta & \gamma + i\delta \\ -(\alpha + \gamma) - i(\beta + \delta) & 0 \end{pmatrix}$$

liefert $\alpha + i\beta = 0$ und $\gamma + i\delta = 0$, und durch Vergleich von Real- und Imaginärteil erhalten wir $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Dadurch ist die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen. Um zu zeigen, dass $V = \text{lin}(B)$ gilt, sei $A \in V$ vorgegeben mit den Einträgen

$$A = \begin{pmatrix} u & v \\ w & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Elemente $u, v, w \in \mathbb{C}$ erfüllen die Gleichung $u + v + w = 0$. Die Zerlegung in Real- und Imaginärteil liefert $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $u = a + ib$ und $v = c + id$. Es gilt nun

$$\begin{aligned} a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} i & 0 \\ -i & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} &= \\ \begin{pmatrix} a + ib & c + id \\ (-a - c) + i(-b - d) & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} u & v \\ -u - v & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & 0 \end{pmatrix} = A. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass A in $\text{lin}(B)$ enthalten ist.

Aufgabe 3

zu (a) Es ist $V = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}$.

Wegen $|V| = 4$ besitzt die Potenzmenge von V genau $2^4 = 16$ Elemente und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(V) &= \left\{ \emptyset, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \right. \\ &\left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \\ &\left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \\ &\left. \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\} \right\}. \end{aligned}$$

zu (b) Laut Vorlesung ist eine einelementige Teilmenge genau dann linear unabhängig, wenn ihr einziges Element nicht der Nullvektor ist, und eine zweielementige Teilmenge ist genau dann linear unabhängig, wenn keiner der beiden Vektoren als skalares Vielfaches des jeweils anderen dargestellt werden kann. Die drei- und vierelementigen Teilmengen in $V = \mathbb{F}_2^2$ sind alle linear abhängig. Die Menge der linear unabhängigen Teilmengen ist somit gegeben durch

$$\left\{ \emptyset, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\} \right\}.$$

zu (c) Es gibt in V keine null- oder einelementigen Erzeugendensysteme (denn solche Mengen spannen einen höchstens zweielementigen Untervektorraum von V auf). Die zweielementigen Erzeugendensysteme sind genau die zweielementigen linear unabhängigen Teilmengen, und die drei- und vierelementigen Teilmengen sind alles Erzeugendensysteme. Insgesamt ist die Menge der Erzeugendensysteme also gegeben durch

$$\left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\} \right\}.$$

zu (d) Die Basen sind genau die linear unabhängigen Teilmengen, die zugleich Erzeugendensysteme von V sind. Bei der Menge der Basen handelt sich somit um die Schnittmenge der beiden zuletzt angegebenen Mengen, also

$$\left\{ \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\}, \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\} \right\}.$$

zu (e) Jede zweielementige Basis kann auf zwei verschiedene Arten angeordnet werden. Es gibt also doppelt so viele geordnete Basen wie Basen, nämlich

$$\left\{ \left(\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right), \left(\begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right) \right\}.$$