

Lineare Algebra

— Lösung Blatt 6 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Es gilt $\text{lin}(\{e_1\}) = \{(z, 0) \mid z \in \mathbb{C}\}$, $\text{lin}(\{e_2\}) = \{(0, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$, $\text{lin}(\{e_1 + e_2\}) = \{(z, z) \mid z \in \mathbb{C}\}$ und $\text{lin}(\{e_1, e_2\}) = \mathbb{C}^2$.

zu (b) Es gilt $1 \cdot e_1 + (-1)(e_1 - e_2) + (-1)e_2 = 0_{\mathbb{R}^2}$, andererseits aber $(1, -1, -1) \neq (0, 0)$.

zu (c) Ja. In diesem Fall gilt $\text{lin}(\{e_1\}) = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $\text{lin}(\{e_2\}) = \{(0, x) \mid x \in \mathbb{C}\}$, $\text{lin}(\{e_1 + e_2\}) = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $\text{lin}(\{e_1, e_2\}) = \mathbb{R}^2$.

zu (d) Die Antwort auf die erste Frage lautet ja. Sei beispielsweise $v_1 = v_2 = e_1$ und $v_3 = e_2$. Dann ist das Tupel (v_1, v_2, v_3) linear abhängig, da $1 \cdot v_1 + (-1) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = 0_{\mathbb{C}^2}$ ist, aber $(1, -1, 0) \neq (0, 0, 0)$. Andererseits ist aus der Vorlesung bekannt, dass die Menge $\{v_1, v_2, v_3\} = \{e_1, e_2\}$ der Einheitsvektoren im $\mathbb{C}^2$ linear unabhängig ist. Die umgekehrte Situation kann aber nicht eintreten. Ist $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear abhängig, dann gibt es Koeffizienten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \neq (0, 0, 0)$ mit $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0_{\mathbb{C}^2}$. Dies zeigt dass das Tupel (v_1, v_2, v_3) ebenfalls linear abhängig ist.

zu (e) Laut Vorlesung ist $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ eine linear unabhängige Menge. Ebenso ist jede Teilmenge davon linear unabhängig, zum Beispiel $\{1, x\}$. Die Menge $\{1, x, x + 1\}$ ist dagegen linear abhängig, da zum Beispiel $1 \cdot 1 + 1 \cdot x + (-1)(x + 1) = 0$ und $(1, 1, -1) \neq (0, 0, 0)$ gilt. Die Menge $\text{lin}(\{5, x\})$ ist gegeben durch $\{5a + bx \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \{c + dx \mid c, d \in \mathbb{R}\}$; die Inklusionen „ $\subseteq$ “ und „ $\supseteq$ “ lassen sich leicht überprüfen.

Aufgabe 1

zu (a) Zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit von S seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit

$$\alpha(1, i) + \beta(i, 1) + \gamma(2, 0) = (0, 0)$$

vorgegeben. Zu zeigen ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Es gilt

$$\begin{aligned} \alpha(1, i) + \beta(i, 1) + \gamma(2, 0) = (0, 0) &\Rightarrow (\alpha, \alpha i) + (\beta i, \beta) + (2\gamma, 0) = (0, 0) \Rightarrow \\ (\alpha + \beta i + 2\gamma, \alpha i + \beta) = (0, 0) &\Rightarrow (\alpha + 2\gamma) + \beta i = 0 \wedge \alpha i + \beta = 0 \end{aligned}$$

Weil eine komplexe Zahl genau dann Null ist, wenn ihr Real- und Imaginärteil Null sind, folgt $\alpha + 2\gamma = 0$, $\beta = 0$ und $\alpha = 0$. Einsetzen von α in die erste Gleichung liefert $0 + 2\gamma = 0$, also ist auch $\gamma = 0$. Damit ist die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen.

zu (b) Hier ist S linear abhängig. Zum Nachweis genügt es, Koeffizienten $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ zu finden, die nicht alle Null sind, für die aber $\alpha(1, i) + \beta(i, 1) + \gamma(2, 0) = (0, 0)$ erfüllt ist. Es ist $(1, i) + (-i)(i, 1) = (1, i) + (1, -i) = (2, 0)$. Setzen wir also $\alpha = 1$, $\beta = -i$ und $\gamma = -1$, dann sind α, β, γ nicht alle Null, aber

$$\alpha(1, i) + \beta(i, 1) + \gamma(2, 0) = 1 \cdot (1, i) + (-i)(i, 1) + (-1)(2, 0) = (2, 0) + (-2, 0) = (0, 0).$$

zu (c) Diese Menge ist linear unabhängig in V . Zum Nachweis seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ mit $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0_V$ vorgegeben. Zu zeigen ist $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Aus der Gleichung $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0_V$ folgt $\alpha f(c) + \beta g(c) + \gamma h(c) = 0_V(c) = 0$ für jedes $c \in \mathbb{R}$. Für $c = 0$ erhalten wir insbesondere

$$\alpha f(0) + \beta g(0) + \gamma h(0) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 2 \cdot 0 + \beta(0 - 3) + \gamma \cdot 0^2 = 0 \Rightarrow -3\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0.$$

Einsetzen von β in die ursprüngliche Gleichung liefert $\alpha f + \gamma h = 0$. Durch Einsetzen von $c = 1$ in die Funktion auf der linken Seite erhalten wir

$$\alpha f(1) + \gamma h(1) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 2 + \gamma \cdot 1 = 0 \Rightarrow 2\alpha + \gamma = 0$$

also $\gamma = -2\alpha$ und $\alpha f + (-2\alpha)h = 0$. Setzen wir in diese Gleichung $c = 2$ ein, so folgt

$$\alpha f(2) + (-2\alpha)h(2) = 0 \Rightarrow \alpha \cdot 4 + (-2\alpha) \cdot 4 = 0 \Rightarrow 4\alpha - 8\alpha = 0 \Rightarrow -4\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0.$$

Insgesamt haben wir $\alpha = \beta = \gamma = 0$ und damit die lineare Unabhängigkeit nachgewiesen.

Aufgabe 2

zu (a) Sei $r \in \mathbb{N}_0$ und $(v_1, \dots, v_r)$ ein linear abhängiges Tupel von Vektoren aus V . Dann gibt es $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in K$, nicht alle gleich Null, mit $\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i = 0_V$. Durch Anwenden von ϕ auf beide Seiten erhalten wir

$$\phi\left(\sum_{i=1}^r \lambda_i v_i\right) = \phi(0_V) \quad \text{und somit} \quad \sum_{i=1}^r \lambda_i \phi(v_i) = 0_V.$$

Die Gleichung rechts zeigt, dass auch das Tupel $(\phi(v_1), \dots, \phi(v_r))$ linear abhängig ist.

zu (b) Sei $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$, $S_1 = \{(0, 0)\}$ und $\phi_1 : V \rightarrow V$ gegeben durch $\phi_1(v) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ für alle $v \in V$. Das Tupel $((0, 0))$ ist linear abhängig, denn es gilt $1 \cdot (0, 0) = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}$ und $1 \neq 0$. Daraus folgt, dass auch S_1 linear abhängig ist. Dass die Abbildung ϕ_1 linear ist, denn es gilt $\phi_1(v + w) = 0_{\mathbb{R}^2} = 0_{\mathbb{R}^2} + 0_{\mathbb{R}^2} = \phi_1(v) + \phi_1(w)$ und $\phi_1(\lambda v) = 0_{\mathbb{R}^2} = \lambda \cdot 0_{\mathbb{R}^2} = \lambda \phi_1(v)$ für alle $v, w \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Wegen $\phi_1(S_1) = \{\phi_1(0, 0)\} = \{(0, 0)\}$ ist auch die Bildmenge linear abhängig.

Sei nun $S_2 = \{(2, 0), (0, 2), (1, 1)\}$ und $\phi_2 : V \rightarrow V$ gegeben durch $\phi_2(a, b) = (a+b, 0)$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$. Das Tupel $((2, 0), (0, 2), (1, 1))$ ist linear abhängig, denn es gilt $2 \cdot (1, 0) + 2 \cdot (0, 1) + (-2) \cdot (1, 1) = (0, 0) = 0_{\mathbb{R}^2}$, aber $(2, 2, -1) \neq (0, 0, 0)$. Daraus folgt, dass die Menge S_2 linear abhängig ist. Die Abbildung ϕ_2 ist linear, denn für alle $(a, b), (c, d) \in \mathbb{R}^2$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt

$$\phi_2((a, b) + (c, d)) = \phi_2(a+c, b+d) = (a+b+c+d, 0) = (a+b, 0) + (c+d, 0) = \phi_2(a, b) + \phi_2(c, d)$$

und $\phi_2(\lambda(a, b)) = \phi_2(\lambda a, \lambda b) = (\lambda a + \lambda b, 0) = \lambda(a + b, 0) = \lambda \phi_2(a, b)$. Es gilt $\phi(S_2) = \{\phi_2(2, 0), \phi_2(0, 2), \phi_2(1, 1)\} = \{(2, 0)\}$. Dies ist eine elementige Menge bestehend aus einem Vektor ungleich dem Nullvektor $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$, und somit eine laut Vorlesung eine linear unabhängige Menge.

zu (c) Sei $V = \mathbb{R}^2$, und sei $\phi_1 : V \rightarrow V$ wie in Teil (b) durch $\phi_1(v) = 0_{\mathbb{R}^2}$ definiert. Wir haben bereits gezeigt, dass ϕ_1 linear ist. Sei $S = \{(1, 0)\}$. Wegen $(1, 0) \neq 0_{\mathbb{R}^2}$ ist die einelementige Menge S laut Vorlesung linear unabhängig. Andererseits ist $\phi_1(S) = \{\phi_1(1, 0)\} = \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ linear abhängig, denn laut Vorlesung ist jede Menge linear abhängig, die den Nullvektor enthält.

Aufgabe 3

zu (a) Diese Aussage ist im Allgemeinen falsch. Sei zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$, $S = \{e_1, 2e_1\}$ und $T = \{e_1\}$. Dann gilt $\text{lin}(S) = \{\lambda e_1 + \mu 2e_1 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \{(\lambda + 2\mu, 0) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ und $\text{lin}(T) = \{\alpha e_1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$, und diese Mengen stimmen überein. Ist nämlich $v \in \text{lin}(S)$, dann gibt es $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $v = (\lambda + 2\mu, 0)$. Setzen wir $\alpha = \lambda + 2\mu$, dann erhalten wir $v = (\alpha, 0)$ und somit $v \in \text{lin}(T)$. Ist umgekehrt $v \in \text{lin}(T)$, dann gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $v = (\alpha, 0)$. Wir können dann zum Beispiel $\lambda = \alpha$ und $\mu = 0$ setzen und erhalten $v = (\lambda + 2\mu, 0) \in \text{lin}(S)$. Insbesondere gilt also $\text{lin}(S) \subseteq \text{lin}(T)$, andererseits ist $S \subsetneq T$ nicht erfüllt.

zu (b) Auch diese Aussage ist im Allgemeinen falsch. Setzen wir wieder $V = \mathbb{R}^2$, diesmal aber $S = \{e_1\}$ und $T = \{e_1, 2e_1\}$, dann gilt $S \subsetneq T$, andererseits aber wie in Teil (a) gezeigt $\text{lin}(S) = \text{lin}(T)$ und somit nicht $\text{lin}(S) \subsetneq \text{lin}(T)$.