Lineare Algebra

— Lösung Blatt 4 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Sehr viele Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind nicht abgeschlossen unter Multiplikation. Beispielsweise ist $A = \{2, 3\}$ nicht abgeschlossen unter Multiplikation, denn es gilt $2, 3 \in A$, aber $2 \cdot 3 = 6 \notin A$. Auch die einelementige Menge $\{2\}$ ist nicht abgeschlossen, wegen $2 \cdot 2 = 4 \notin A$. Es gibt auch viele Beispiele für unendliche Teilmengen von $\mathbb{R}$, die nicht abgeschlossen unter Multplikation sind, zum Beispiel die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ aller negativen reellen Zahlen. (Die Teilmenge der positiven reellen Zahlen ist dagegen abgeschlossen unter Multiplikation.)

zu (b) Nein. Beispielsweise ist die Menge $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 2\}$ abgeschlossen unter Multiplikation (denn für beliebige $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m, n \geq 2$ gilt $mn \in \mathbb{N}$ und $mn \geq 2$), es gibt aber kein Neutralelement bezüglich der Multiplikation in A. Also ist $(A, \cdot)$ kein Monoid, erst recht keine Gruppe. Denn nehmen wir nämlich an, $e \in A$ wäre ein Neutralelement. Dann müsste insbesondere $2 \cdot e = 2$ gelten, und Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ würde $e = 1$ liefern. (Weil $2 \cdot e = 2$ eine Gleichung zwischen reellen Zahlen ist, dürfen wir mit $\frac{1}{2}$ multiplizieren; dass $\frac{1}{2}$ nicht in A liegt, spielt dabei keine Rolle.) Aber $e = 1$ steht zu $e \in A$ im Widerspruch.

zu (c) Beispielsweise ist $\mathbb{N}$ mit der gewöhnlichen Multiplikation ein Monoid, aber keine Gruppe. Das Neutralelement ist 1, denn es gilt $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{N}$. Aber zum Beispiel besitzt $2 \in \mathbb{N}$ kein Inverses. Wäre $a \in \mathbb{N}$ ein Inverses, dann müsste $2 \cdot a = 1$ gelten. Aber Multiplikation dieser Gleichung mit $\frac{1}{2}$ liefert $a = \frac{1}{2}$, im Widerspruch zu $a \in \mathbb{N}$. (Wie in Teil (b) ist auch hier die Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ kein Problem.)

zu (d) Schränkt man die Verknüpfung eines Monoids $(G, \cdot)$ auf die Teilmenge $G^\times \subseteq G$ der invertierbaren Elemente des Monoids ein, so erhält man nach Satz (4.6) eine Gruppe. Wenden man dies auf das Monoid $(\mathcal{M}_{n,K}, \cdot)$ an, die $n \times n$-Matrizen mit dem Produkt von Matrizen als Verknüpfung, so erhält man die Gruppe $\mathrm{GL}_n(K)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen.

zu (e) Das einzige invertierbare Element in $(\mathbb{N}_0, +)$ ist die 0. Dass 0 invertierbar ist, folgt aus der Tatsache, dass allgemein das Neutralelement eines Monoids immer invertierbar ist. Ist andererseits $m \in \mathbb{N}_0$ invertierbar, dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $m+n = 0$. Aus $m+n = 0$ und $m, n \geq 0$ folgt $m = n = 0$. Dies zeigt, dass außer 0 keine weiteren invertierbaren Elemente existieren. Wendet man nun Satz (4.6) auf dieses Monoid an, so erhält man die Gruppe $(\{0\}, +)$, die einelementige Menge $\{0\}$ mit der gewöhnlichen Addition als Verknüpfung.

Aufgabe 1

Sei zunächst $a \in \mathbb{R}$ beliebig. Wir vereinfachen die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS durch schrittweise, wobei darauf zu achten ist, dass jede einzelne Zeilenumformungen für beliebiges $a \in \mathbb{R}$ zulässig ist.

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & a+1 & 5a-8 \\ 2a-2 & 1 & 2a+2 & 10a-9 \\ a-1 & -2 & 0 & 2a-16 \end{pmatrix} \overset{(A_{1,2,-2}),(A_{1,3,-1})}{\mapsto} \begin{pmatrix} a-1 & 0 & a+1 & 5a+8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -a-1 & -3a-8 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(A_{2,3,2})}{\mapsto} \begin{pmatrix} a-1 & 0 & a+1 & 5a-8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -a-1 & -3a+6 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Wir betrachten nun zunächst den Fall $a \notin \{-1, 1\}$. Hier sind die folgenden weiteren Umformungen möglich.

$$\begin{pmatrix} a-1 & 0 & a+1 & 5a-8 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -a-1 & -3a+6 \end{pmatrix} \overset{(M_{1,\frac{1}{a-1}}),(M_{3,-\frac{1}{a+1}})}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{a+1}{a-1} & \frac{5a-8}{a-1} \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a-6}{a+1} \end{pmatrix} \overset{A_{(3,1,-\frac{a+1}{a-1})}}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3a-6}{a+1} \end{pmatrix}$$

wobei im letzten Schritt der Eintrag rechts oben durch die Nebenrechung $(-\frac{a+1}{a-1}) \cdot (\frac{3a-6}{a+1}) + \frac{5a-8}{a-1} = \frac{-3a+6+5a-8}{a-1} = \frac{2a-2}{a-1} = 2$ zu Stande kommt. An der letzten Matrix kann die Lösungsmenge abgelesen werden: Es gilt

$$\mathcal{L}_a = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ \frac{3a-6}{a+1} \end{pmatrix} \right\} \quad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}.$$

Nun betrachten wir den Fall $a = -1$. Wir setzen den Wert -1 in die Matrix (*) ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix} \overset{(M_{1,-1/2})}{\mapsto} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Diese normierte ZSF hat die Kennzahlen $r = 3$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 4$. Die Zahl der Unbekannten ist $n = 3$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass aus $j_n = j_3 = 3 + 1 = n + 1$ eine leere Lösungsmenge folgt. Es gilt also $\mathcal{L}_{-1} = \varnothing$.

Zum Schluss betrachten wir den Fall $a = 1$. Wieder setzen wir den Wert 1 in (*) ein und bringen die Matrix auf normierte ZSF.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(V_{1,2})}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 3 \end{pmatrix} \overset{(A_{2,3,1})}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{(M_{2,1/2})}{\mapsto} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die ZSF hat die Kennzahlen $r = 2$, $j_1 = 2$, $j_2 = 3$. Das Schema aus der Vorlesung zur Bestimmung einer speziellen Lösung liefert den Lösungsvektor $v_0 = (0, 7, -\frac{3}{2})$. (Die ersten zwei Einträge 7 und $-\frac{3}{2}$ der vierten Spalte werden an den Positionen $j_1 = 2$ und $j_2 = 3$ des Vektors eingetragen.)

Um die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen LGS zu erhalten, betrachten wir die nicht-erweiterte umgeformte Koeffizientenmatrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Auch hier sind die Kennzahlen $r = 2$, $j_1 = 2$, $j_3 = 3$. Wir setzen $S = \{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3\} = \{1\}$, und das Schema zur Lösung homogener LGS liefert den Basisvektor $v_1 = (1, 0, 0)$. Die homogene Lösungsmenge ist also gegeben durch $\mathcal{L}^h = \{\lambda(1, 0, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, und die Lösungsmenge des inhomogenen Systems ist für $a = 1$ gegeben durch

$$\mathcal{L}_1 \quad = \quad v_0 + \mathcal{L}^h \quad = \quad \{v_0 + \lambda v_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ 7 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 2

zu (a) Um zu testen, ob U unter $*$ abgeschlossen ist, muss jedes Element als U mit jedem Element aus U verknüpft werden. Wir tragen die Ergebnisse in eine Tabelle ein.

$*$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	i	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

Alle Einträge der Tabelle liegen in U, somit ist U abgeschlossen unter $*$. Nun überprüfen wir, ob U eine Gruppe ist. Das Assoziativgesetz ist erfüllt, denn für alle $a, b, c \in U$ gilt

$$(a * b) * c \quad = \quad (a \cdot b) \cdot c \quad = \quad a \cdot (b \cdot c) \quad = \quad a * (b * c).$$

Dabei wurde im zweiten Schritt verwendet, dass das Assoziativgesetz für die Multiplikation auf $\mathbb{C}$ erfüllt ist. Für alle $a \in U$ gilt $1 * a = 1 \cdot a = a$ und $a * 1 = a \cdot 1 = a$, wobei verwendet wurde, dass $1 \cdot a = a$ und $a \cdot 1 = a$ sogar für alle $a \in \mathbb{C}$ gilt. Dies zeigt, dass 1 ein Neutralelement in $(U, *)$ ist. Die Gleichungen $1 * 1 = 1 \cdot 1 = 1$, $(-1) * (-1) = (-1) \cdot (-1) = 1$, $i * (-i) = i \cdot (-i) = 1$ und $(-i) * i = (-i) \cdot i = 1$ zeigen, dass jedes Element in U ein Inverses besitzt: Es gilt $1^{-1} = 1$, $(-1)^{-1} = -1$, $i^{-1} = -i$ und $(-i)^{-1} = i$. Insgesamt ist $(U, *)$ also eine Gruppe.

zu (b) Auch hier beweisen wir zunächst die Abgeschlossenheit. Seien $A, B \in U$ vorgegeben. Dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ mit

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B \quad = \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Das Element

$$A * B \quad = \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} ac & 0 \\ 0 & bd \end{pmatrix}$$

liegt wegen $ac, bd \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ in U. Dies zeigt, dass U unter $*$ abgeschlossen ist. Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ, denn auf Grund der Assoziativität der Multiplikation von Matrizen (siehe (2.7)(iii)) gilt

$(A*B)*C = (AB)C = A(BC) = A*(B*C)$ für alle $A, B, C \in U$. Wegen $1 \in \mathbb{Q}\backslash\{0\}$ ist die Einheitsmatrix

$$E^{(2)} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Element der Menge U. Es gilt $A * E^{(2)} = A \cdot E^{(2)} = A$ und $E^{(2)} * A = E^{(2)} \cdot A = A$ für alle $A \in U$, weil $A \cdot E^{(2)} = E^{(2)} \cdot A = A$ laut Vorlesung sogar für alle $A \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{Q}}$ erfüllt ist. Für alle $a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ gilt außerdem

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da $\begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & b^{-1} \end{pmatrix}$ jeweils ein Element der Menge U ist, zeigt dies, dass jedes Element des Monoids $(U, *)$ ein Inverses besitzt. Also ist $(U, *)$ eine Gruppe.

zu (c) Seien $A, B \in U$ vorgegeben. Dann gibt $a, b, c \in \mathbb{Q}$ und $u, v, w \in \mathbb{Q}$ mit

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B \quad = \quad \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix}.$$

Wegen $au, cw, av + bw \in \mathbb{Q}$ ist auch die Matrix

$$A * B \quad = \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u & v \\ 0 & w \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} au & av + bw \\ 0 & cw \end{pmatrix}$$

in U enthalten. Dies zeigt, dass U unter $*$ abgeschlossen ist. Das Assoziativgesetz folgt wiederum aus der Assoziativität der Matrizenmultiplikation: Für alle $A, B, C \in U$ gilt $(A * B) * C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C) = A * (B * C)$. Setzt man $a = c = 1$ und $b = 0$, dann ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad E^{(2)}.$$

Die Einheitsmatrix $E^{(2)}$ ist also in U enthalten. Wegen $A*E^{(2)} = A \cdot E^{(2)} = A$ und $E^{(2)}*A = E^{(2)} \cdot A = A$ handelt es sich um ein Neutralelement bezüglich $*$, also ist $(U, *)$ ein Monoid. Allerdings ist $(U, *)$ keine Gruppe: Setzt man $a = b = c = 0$, dann erhält man

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \mathbf{0^{(2)}}$$

also ist die Nullmatrix $\mathbf{0^{(2)}}$ in U enthalten. Für alle $A \in U$ gilt aber $\mathbf{0^{(2)}} * \mathbf{A} = \mathbf{0^{(2)}} \neq \mathbf{E^{(2)}}$, also hat $\mathbf{0^{(2)}}$ in U kein Inverses.

Aufgabe 3

zu (a) Das Kriterium lautet, dass B und C invertierbare Matrizen sind. Setzen wir dies nämlich voraus, dann gilt

$$\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} BB^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & CC^{-1} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} E^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{(2)} \end{pmatrix} \quad = \quad E^{(4)}$$

und ebenso

$$\begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} B^{-1}B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^{-1}C \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} E^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{(2)} \end{pmatrix} \quad = \quad E^{(4)}$$

also ist die Blockmatrix A invertierbar, und die Inverse ist gegeben durch

$$A^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} B^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C^{-1} \end{pmatrix}$$

Setzen wir umgekehrt voraus, dass A invertierbar ist, und schreiben wir die Inverse $U = A^{-1}$ in der Blockform

$$U \quad = \quad \begin{pmatrix} B_1 & D_1 \\ F_1 & C_1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \quad B_1 \in \mathcal{M}_{m,\mathbb{R}}\ ,\ C_1 \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}\ ,\ D_1 \in \mathcal{M}_{n\times m,\mathbb{R}} \text{ und } F_1 \in \mathcal{M}_{m\times n,\mathbb{R}}.$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} BB_1 & BD_1 \\ CF_1 & CC_1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_1 & D_1 \\ F_1 & C_1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} E^{(m)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{(n)} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} B_1B & D_1C \\ F_1B & C_1C \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} B_1 & D_1 \\ F_1 & C_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} E^{(m)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E^{(n)} \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $BB_1 = B_1B = E^{(m)}$ und $CC_1 = C_1C = E^{(n)}$, die Matrizen B und C sind also beide invertierbar.

zu (b) Wir verwenden das in der Vorlesung beschriebene Verfahren. Die Rechnung

$$\begin{pmatrix} -12 & -6 & 37 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -12 & -6 & 37 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & -6 & 1 & 1 & 0 & 12 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

liefert

$$\begin{pmatrix} -12 & -6 & 37 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} 3 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen das Ergebnis durch eine Proberechnung:

$$\begin{pmatrix} -12 & -6 & 37 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 18 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 6 & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad E^{(3)}.$$