Lineare Algebra

— Lösung Blatt 4 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Wir formen die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS in normierte ZSF um.

$$\begin{pmatrix} \bar1 & \bar0 & \bar2 & \bar1 & \bar1 \\ \bar0 & \bar2 & \bar1 & \bar0 & \bar1 \\ \bar1 & \bar1 & \bar2 & \bar1 & \bar0 \\ \bar2 & \bar0 & \bar2 & \bar2 & \bar2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar1 & \bar0 & \bar2 & \bar1 & \bar1 \\ \bar0 & \bar2 & \bar1 & \bar0 & \bar1 \\ \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 & \bar2 \\ \bar0 & \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar1 & \bar0 & \bar2 & \bar1 & \bar1 \\ \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 & \bar2 \\ \bar0 & \bar2 & \bar1 & \bar0 & \bar1 \\ \bar0 & \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \bar1 & \bar0 & \bar2 & \bar1 & \bar1 \\ \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 & \bar2 \\ \bar0 & \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 \\ \bar0 & \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar1 & \bar0 & \bar2 & \bar1 & \bar1 \\ \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 & \bar2 \\ \bar0 & \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 \\ \bar0 & \bar0 & \bar0 & \bar0 & \bar0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar1 & \bar0 & \bar0 & \bar1 & \bar1 \\ \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 & \bar2 \\ \bar0 & \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 \\ \bar0 & \bar0 & \bar0 & \bar0 & \bar0 \end{pmatrix}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten, von dieser normierten Zeilenstufenform die Lösungsmenge abzulesen. Wiederholen wir zunächst das Verfahren aus § 3 der Vorlesung. Die normierte Zeilenstufenform hat die Kennzahlen $r = 3$, $j_1 = 1$, $j_2 = 2$, $j_3 = 3$. Nach Satz (3.5) erhält man eine spezielle Lösung, indem man die Einträge der letzten Spalte in die Positionen j_1, j_2, j_3 des Vektors einträgt und alle anderen Einträge auf Null setzt. So erhält man die spezielle Lösung $(\bar1, \bar2, \bar0, \bar0)$. Die Lösungsmenge des homogenen Systems erhält man wie in Satz (3.4) beschrieben. Zunächst bildet man die Menge $S = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j_1, j_2, j_3\} = \{4\}$. Dies bedeutet, dass die homogene Lösungsmenge von nur einem Basisvektor b_4 aufgespannt wird. Diesen erhält man, indem der vierte Eintrag auf den Wert $\bar1$ gesetzt und die Einträge der vierten Spalte mit negativem Vorzeichen auf die Positionen $j_1 = 1$, $j_2 = 2$ und $j_3 = 3$ geschrieben werden. Man erhält so den Basisvektor $b_4 = (-\bar1, \bar0, \bar0, \bar1) = (\bar2, \bar0, \bar0, \bar1)$ und insgesamt für das inhomogene LGS nach Proposition (1.6) die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar1 \\ \bar2 \\ \bar0 \\ \bar0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \bar2 \\ \bar0 \\ \bar0 \\ \bar1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{F}_3 \right\} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar1 \\ \bar2 \\ \bar0 \\ \bar0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar0 \\ \bar2 \\ \bar0 \\ \bar1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar2 \\ \bar2 \\ \bar0 \\ \bar2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Eine andere Möglichkeit (bei der man sich kein Schema merken muss) besteht darin, das lineare Gleichungssystem der umgeformten Matrix einfach wieder auszuschreiben: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} \bar1 & \bar0 & \bar0 & \bar1 & \bar1 \\ \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 & \bar2 \\ \bar0 & \bar0 & \bar1 & \bar0 & \bar0 \\ \bar0 & \bar0 & \bar0 & \bar0 & \bar0 \end{pmatrix}$$

entspricht dem LGS $x_1 + x_4 = \bar1$, $x_2 = \bar2$, $x_3 = \bar0$. Dieses kann umgeformt werden zu $x_1 = \bar1 - x_4$, $x_2 = \bar2$, $x_3 = \bar0$. Da es keine Gleichung für x_4 gibt, ist dies der einzige „freie Parameter“. Wir erhalten die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_3^4 \;\middle|\; x_1 = \bar{1} - x_4, x_2 = \bar{2}, x_3 = \bar{0} \right\} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} - x_4 \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ x_4 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_4 \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

$$= \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_4 \in \mathbb{F}_3 \right\}$$

zu (b) Sei zunächst $a \in \mathbb{F}_3$ beliebig. Wir formen die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS soweit wie möglich um, wobei darauf zu achten ist, dass keine Operationen durchgeführt werden, die für manche Werte a unzulässig sind (Division durch und Multiplikation mit $\bar{0}$).

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & a & a+\bar{2} \\ \bar{2}a+\bar{2} & a & \bar{0} & a & \bar{2}a+\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2}a & \bar{2} & \bar{2}a & \bar{1} \\ \bar{2}a+\bar{2} & a & \bar{2} & a & \bar{2}a+\bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{2}a+\bar{2} & a & \bar{0} & a & \bar{2}a+\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & a & a+\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2}a & \bar{2} & \bar{2}a & \bar{1} \\ \bar{2}a+\bar{2} & a & \bar{2} & a & \bar{2}a+\bar{2} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \bar{2}a+\bar{2} & a & \bar{0} & a & \bar{2}a+\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & a & a+\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{2}a & \bar{2} & \bar{2}a & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{2}a+\bar{2} & a & \bar{0} & a & \bar{2}a+\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2}a & \bar{2} & \bar{2}a & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & a & a+\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \bar{2}a+\bar{2} & a & \bar{0} & a & \bar{2}a+\bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2}a & \bar{2} & \bar{2}a & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & a & a+\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & a & a \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+\bar{1} & \bar{2}a & \bar{0} & \bar{2}a & a+\bar{2} \\ \bar{0} & a & \bar{1} & a & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & a & a+\bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & a & a \end{pmatrix}$$

Wir betrachten nun zunächst den Fall $a = \bar{0}$. Hier kann die Matrix weiter umgeformt werden zu

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

Wie in Teil (a) beschrieben, lesen wir an der letzten Spalte die spezielle Lösung $(\bar{2}, \bar{0}, \bar{2}, \bar{0})$ des inhomogenen Systems ab. Die zweite und vierte Spalte liefern uns die Basisvektoren $(\bar{0}, \bar{1}, \bar{0}, \bar{0})$ und $(\bar{0}, \bar{0}, \bar{0}, \bar{1})$ für die Lösungsmenge des homogenen Systems. Insgesamt ist die Lösungsmenge des inhomogenen Systems im Fall $a = \bar{0}$ gegeben durch

$$\mathcal{L}_{\bar{0}} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{F}_3 \right\}.$$

Wer Lust hat, kann die Lösungsmenge auch ganz explizit angeben: Für λ und μ gibt es jeweils drei

Möglichkeiten, also enthält die Lösungsmenge insgesamt $3 \cdot 3 = 9$ Elemente.

$$\mathcal{L}_{\bar{0}} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \right\}$$

Nun betrachten wir den Fall $a = \bar{2}$. Hier kann die Matrix umgeformt werden zu

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \end{pmatrix}$$

An der letzten Zeile kann abgelesen werden, dass das LGS keine Lösung besitzt, also $\mathcal{L}_{\bar{2}} = \varnothing$ gilt.

Der letzte verbleibende Fall ist $a = \bar{1}$. Hier erhalten wir normierte ZSF durch die Umformung

$$\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{2} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$$

In diesem Fall ist das LGS eindeutig lösbar, und die einzige Lösung $(\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{1})$ kann an der letzten Spalte abgelesen werden. Es gilt also $\mathcal{L}_{\bar{1}} = \{(\bar{0}, \bar{2}, \bar{2}, \bar{1})\}$.

Aufgabe 2

zu (a) Diese Menge U ist nicht abgeschlossen unter $*$. Die Matrix

$$A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ist in U enthalten (setze $\lambda = \mu = 1$), es gilt aber

$$A * A \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und diese Matrix ist nicht in U enthalten.

zu (b) Diese Menge U ist unter $*$ abgeschlossen. Zum Nachweis seien $A, B \in U$ vorgegeben. Dann gibt es $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}.$$

Es gilt dann

$$A * B \quad = \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ ad+bc & ac+bd \end{pmatrix}$$

und diese Matrix liegt wiederum in U. Die Einheitsmatrix $E^{(2)}$ ist in U enthalten (setze $a = 1$, $b = 0$) und für alle $A \in U$ gilt $A * E^{(2)} = AE^{(2)} = A$ sowie $E^{(2)} * A = E^{(2)}A = A$. Wäre $(U, *)$ eine Gruppe, dann wäre $E^{(2)}$ das Neutralelement der Gruppe. Weiter müsste für jedes Element ein Inverses existieren, insbesondere auch für die Nullmatrix $\mathbf{0^{(2)}}$, denn diese ist in U enthalten (setze $a = b = 0$). Es gilt aber $A * \mathbf{0^{(2)}} = \mathbf{0^{(2)}} \neq \mathbf{E^{(2)}}$ für alle $A \in U$, also besitzt $\mathbf{0^{(2)}}$ in U kein Inverses. Folglich ist $(U, *)$ keine Gruppe.

zu (c) Zum Nachweis der Abgeschlossenheit seien $\alpha, \beta \in U$ vorgegeben; zu zeigen ist $\alpha * \beta \in U$. Nach Definition von U gibt es $r, s, t, u \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha = r + s\sqrt{2}$, $\beta = t + u\sqrt{2}$ und $(r, s) \neq (0, 0)$, $(t, u) \neq (0, 0)$. Es gilt

$$\alpha * \beta \quad = \quad \alpha\beta \quad = \quad (r + s\sqrt{2})(t + u\sqrt{2}) \quad = \quad (rt + 2su) + (st + ru)\sqrt{2}.$$

Wäre $(rt + 2su, st + ru) = (0, 0)$, dann würde $\alpha\beta = 0$ und somit $\alpha = 0$ oder $\beta = 0$ folgen. Nehmen wir zunächst an, dass $\alpha = 0$ ist. Dann gilt $s\sqrt{2} = -r$. Wäre $s = 0$, dann würde auch $r = 0$ folgen, im Widerspruch zu $(r, s) \neq (0, 0)$. So aber gilt $\sqrt{2} = -\frac{r}{s}$. Aber dies steht im Widerspruch dazu, dass $\sqrt{2}$ irrational ist. Also ist $\alpha \neq 0$. Genauso zeigt man auch $\beta \neq 0$. Die Annahme war also falsch, es gilt $(rt + 2su, st + ru) \neq (0, 0)$. Insgesamt haben wir damit nachgewiesen, dass $\alpha * \beta$ ein Element der Menge U ist.

Die Verknüpfung $*$ ist assoziativ, weil sie durch Einschränkung der Multiplikation auf $\mathbb{R}$ zu Stande kommt und diese assoziativ ist. Die Zahl 1 ist in U enthalten, denn es gilt $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ und $(1, 0) \neq (0, 0)$. Für jedes $\alpha \in U$ gilt $\alpha * 1 = \alpha \cdot 1 = \alpha$ und $1 * \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha$. Also ist 1 ein Neutralelement in U.

Nun zeigen wir noch, dass jedes Element $\alpha \in U$ ein Inverses besitzt. Seien dazu $r, s \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha = r + s\sqrt{2}$ und $(r, s) \neq (0, 0)$. Zunächst stellen wir fest, dass $r^2 - 2s^2 \neq 0$ ist. Denn ansonsten wäre $r^2 = 2s^2$. Es muss $s \neq 0$ sein, denn ansonsten wäre auch $r = 0$ im Widerspruch zu $(r, s) \neq (0, 0)$. Daraus folgt $(\frac{r}{s})^2 = 2$ und $\frac{r}{s} \in \{\pm\sqrt{2}\}$, was erneut der Irrationalität von $\sqrt{2}$ widerspricht. Sei nun

$$\beta \quad = \quad \frac{r}{r^2 - 2s^2} + \frac{(-s)}{r^2 - 2s^2}\sqrt{2}.$$

Dann gilt $\beta \in U$, und es gilt sowohl

$$\alpha * \beta \quad = \quad \alpha\beta \quad = \quad \frac{(r + s\sqrt{2})(r - s\sqrt{2})}{r^2 - 2s^2} \quad = \quad \frac{r^2 - 2s^2}{r^2 - 2s^2} \quad = \quad 1$$

als auch $\beta * \alpha = \beta\alpha = \alpha\beta = 1$. Dies zeigt, dass β das Inverse von α in U ist. Ingesamt haben wir nachgewiesen, dass U eine Gruppe ist.

Anmerkung: Wie kommt man auf das Inverse β von α? Das Inverse muss $\alpha * \beta = 1$ erfüllen, also $\alpha\beta = 1$. Daraus folgt, dass für das Inverse nur $\beta = \alpha^{-1}$ in Frage kommt, und es gilt

$$\alpha^{-1} \quad = \quad \frac{1}{r + s\sqrt{2}} \quad = \quad \frac{r - s\sqrt{2}}{(r + s\sqrt{2})(r - s\sqrt{2})} \quad = \quad \frac{r - s\sqrt{2}}{r^2 - 2s^2} \quad = \quad \frac{r}{r^2 - 2s^2} + \frac{(-s)}{r^2 - 2s^2}\sqrt{2}.$$

Aufgabe 3

zu (a) „$\Leftarrow$“ Wir zeigen: Ist $ad - bc \neq 0$, dann ist A invertierbar. Zunächst betrachten wir den Fall $a \neq 0$. Dann erhält man die Inverse von A durch die Rechnung

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & d - \frac{bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-c} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & -\frac{c}{ad-c} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}$$

Also ist A invertierbar, und die Inverse ist gegeben durch

$$A^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & -\frac{b}{ad-bc} \\ -\frac{c}{ad-c} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Nun betrachten wir den Fall $a = 0$. Wegen $ad - bc \neq 0$ müssen dann b und c beide ungleich Null sein. Wieder wenden wir das bekannte Verfahren zur Inversenberechnung an.

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} c & d & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & b & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{d}{c} & 0 & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ 0 & 1 & \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix}.$$

Dies zeigt, dass A invertierbar ist, und dass die Inverse gegeben ist durch

$$A^{-1} \quad = \quad \begin{pmatrix} -\frac{d}{bc} & \frac{1}{c} \\ \frac{1}{b} & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{bc} \begin{pmatrix} -d & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{(-bc)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & 0 \end{pmatrix} \quad = \quad \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

„$\Rightarrow$“ Wir zeigen, dass A im Fall $ad - bc = 0$ nicht invertierbar ist. Wieder betrachten wir zunächst den Fall $a \neq 0$. In diesem Fall ist $d = \frac{bc}{a}$. Die Rechnung von oben zeigt, dass A durch Zeilenumformungen auf die normierte Zeilenstufenform

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \mapsto \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & d - \frac{bc}{a} \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gebracht werden kann. Diese enthält eine Nullzeile; laut Vorlesung zeigt dies an, dass A nicht invertierbar ist. Nun betrachten wir den Fall $a = 0$. Wegen $ad - bc = 0$ muss dann $b = 0$ oder $c = 0$ gelten. Im ersten Fall enthält A eine Nullzeile, im zweiten eine Nullspalte. In beiden Fällen ist A nicht invertierbar, denn die Multiplikation mit einer beliebigen Matrix

$$B \quad = \quad \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$$

ergibt

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ cr + dt & cs + du \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & rb + sd \\ 0 & tb + ud \end{pmatrix}.$$

Es gibt also keine Matrix B mit $AB = E^{(2)}$ bzw. $BA = E^{(2)}$.

zu (b) Die Matrix $T \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ bestimmen wir, indem wir neben A eine Einheitsmatrix schreiben und die Matrix A durch Zeilenumformungen auf normierte ZSF bringen. Dabei werden dieselben Zeilenumformungen auch auf die nebenstehende Matrix angewendet.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 17 & 4 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 4 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 36 & -8 & 0 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -8 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Die gesuchte Matrix T ist also gegeben durch

$$T = \begin{pmatrix} -8 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix U bestimmen wir, indem neben wir die auf normierte ZSF gebrachte Matrix A eine 4×4-Einheitsmatrix schreiben. Dann bringen wir A durch *Spaltenumformungen* auf die angegebene Diagoanlgestalt, wobei wir dieselben Spaltenumformungen auch auf die nebenstehende Matrix anwenden.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Matrix U ist also gegeben durch

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir überprüfen unser Ergebnis, indem wir das Produt TAU berechnen. Es gilt

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & 17 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$