

Lösung Globalübungsblatt 3

Aufgabe 1

zu (a) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^t(AB) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, {}^tA {}^tB = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow {}^t(AB) \neq {}^tA {}^tB$$

zu (b) falsch Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dann gilt $A \neq 0^{(2)}, B \neq 0^{(2)}$, aber

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0^{(2)}.$$

zu (c) falsch Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Dann gilt $A \neq E_2$, aber $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A$

einfacheres Gegenbeispiel:

$$\text{Nullmatrix } A = 0^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu (d) richtig Beweis: Sei $A \in GL_n(K)$ mit $A^2 = A$.

Da A invertierbar ist, existiert A^{-1} . $\Rightarrow A^{-1} \cdot A^2 = A^{-1} A$

$$(A^{-1} \cdot A) \cdot A = A^{-1} A \Rightarrow E^{(n)} \cdot A = E^{(n)} \Rightarrow A = E^{(n)}$$

zu (e) [Vorbereitung: $(A+B)(A-B) = A(A-B) + B(A-B)$
 $= A^2 - AB + BA - B^2 \stackrel{!}{=} A^2 - B^2$ gilt nur, wenn

$$-AB + BA = 0^{(n)}, \text{ also } BA = AB \}$$

falsch Gegenbeispiel: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 21 \end{pmatrix}$$

$$(A+B)(A-B) = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 13 \\ 12 & 20 \end{pmatrix} \neq A^2 - B^2$$

Aufgabe 2

zu (a) [Beispiel für eine nilpotente Matrix $\neq 0^{(n)}$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}]$

Sei nun $N \in M_{n,n}$ nilpotent. 2.2g.:

i) N nicht invertierbar

ii) $E^{(n)} + N$ ist invertierbar

N nilpotent $\Rightarrow \exists m \in \mathbb{N}$ mit $N^m = 0^{(n)}$

zu i) Ang. N ist invertierbar. $\Rightarrow N$ besitzt ein Inverses N^{-1} .

Wir setzen voraus, dass m mit der Eigenschaft $N^m = 0^{(n)}$

minimal ist, also $N^{m-1} \neq 0^{(n)}$. (Per Konvention gilt

$N^0 = E^{(n)}$.) $\Rightarrow N^{m-1} = E^{(n)} \cdot N^{m-1} = N^{-1} \cdot N \cdot N^{m-1}$

$= N^{-1} \cdot N^m = N^{-1} \cdot 0^{(n)} = 0^{(n)} \nmid$ zu $N^{m-1} \neq 0^{(n)}$.

[Zwischenfrage: Kann jedes $A \in GL_n(K)$ durch elementare Zeilen-
umformungen (EZU) in die Einheitsmatrix $E^{(n)}$ überführt werden?

Antwort: Ja! Laut Vorlesung kann A durch EZU auf eine
normierte ZSF A' gebracht werden. Es gibt somit ein Produkt T
von Elementarmatrizen mit $TA = A'$, und es gilt $T \in GL_n(K)$
(weil Elementarmatrizen invertierbar sind). Mit T und A ist
auch $A' = TA$ invertierbar. Der Zeilenrang r von A' muss deshalb
gleich n sein, denn Matrizen mit Nullzeilen sind nicht invertierbar.
Die einzige Matrix in normierter ZSF mit $r = n$ ist $E^{(n)}$, also gilt $A' = E^{(n)}$.]
alternativer Beweis für (i):

Zeige zunächst durch vollständige Induktion:

Ist $A \in GL_n(K)$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $A^n \in GL_n(K)$.

Ind.-Anf. $n=1$: nichts zu zeigen

Ind.-Schritt: Sei $A \in GL_n(K)$. Ind.-Vor. $\Rightarrow A^m$ invertierbar,

d.h. $(A^m)^{-1}$ existiert. $\rightarrow A^{m+1} \cdot (A^m)^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot A^m$.

$$(A^m)^{-1} \cdot A^{-1} = A \cdot E^{(n)} \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E^{(n)} \Rightarrow$$

A^{m+1} ist invertierbar.

Ang. $N^m = 0^{(n)}$ für ein $m \in \mathbb{N}$, und N ist invertierbar.

$$\text{s.o.} \Rightarrow (N^m)^{-1} \text{ existiert} \Rightarrow E^{(n)} = N^m \cdot (N^m)^{-1} =$$

$$0^{(n)} \cdot (N^m)^{-1} = 0^{(n)} \quad \downarrow$$

zu iii) [Vorüberlegung: Ang. $N^2 = 0^{(n)}$. Dann gilt

$$(E^{(n)} + N)(E^{(n)} - N) = E^{(n)}(E^{(n)} - N) + N(E^{(n)} - N) = E^{(n)} - N + N - N^2 = E^{(n)} - N^2 = E^{(n)} - 0^{(n)} = E^{(n)}. \Rightarrow (E^{(n)} + N)^{-1} = E^{(n)} - N.$$

$$\text{Ang. } N^3 = 0^{(n)}. \Rightarrow (E^{(n)} + N)(E^{(n)} - N + N^2) = (E^{(n)} - N + N^2) + (N - N^2 + N^3) = E^{(n)} + N^3 = E^{(n)} + 0^{(n)} = E^{(n)} \Rightarrow (E^{(n)} + N)^{-1} = E^{(n)} - N + N^2$$

Dies führt uns auf eine allgemeine Vermutung, was die Form der Inversen $(E^{(n)} + N)^{-1}$ angeht.]

Beh.: Ist $N \in M_{n,k}$ nilpotent und $m \in \mathbb{N}$ mit $N^m = 0^{(n)}$, dann gilt $(E^{(n)} + N)^{-1} = \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k N^k$. (Insbesondere ist $E^{(n)} + N$ also invertierbar.)

Bew.: Es gilt jeweils

$$\begin{aligned} (E^{(n)} + N) \left(\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k N^k \right) &= E^{(n)} \cdot \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k N^k + N \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k N^k \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k N^k + \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k N^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k N^k + \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} N^k \\ &= E^{(n)} + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^k N^k + \sum_{k=1}^{m-1} (-1)^{k-1} N^k + (-1)^{m-1} N^m \\ &= E^{(n)} + (-1)^{m-1} N^m = E^{(n)} + (-1)^{m-1} \cdot 0^{(n)} = E^{(n)}. \end{aligned}$$

zu b) Es gilt $A = E^{(3)} + N$ mit $N = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Die Matrix N

ist nilpotent, denn es gilt

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } N^3 = N^2 \cdot N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0^{(3)}.$$

Teil a) $\Rightarrow E^{(3)} - N + N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist Inverse von $A = E^{(3)} + N$

$$\text{Probe: } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E^{(3)}$$

zu c) Es gilt die Äquivalenz $AB \text{ symm.} \Leftrightarrow {}^t(AB) = AB$

$$\Leftrightarrow {}^t \left(\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow {}^t \begin{pmatrix} 2b & 3 & 3c \\ 3 & 3a+1 & c \\ 1 & a+1 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 3 & 3c \\ 3 & 3a+1 & c \\ 1 & a+1 & c \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2b & 3 & 1 \\ 3 & 3a+1 & a+1 \\ 3c & c & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & 3 & 3c \\ 3 & 3a+1 & c \\ 1 & a+1 & c \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3c = 1 \wedge a+1 = c$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{1}{3} \wedge a+1 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow c = \frac{1}{3} \wedge a = -\frac{2}{3}$$

Die gesuchte Menge ist also $\left\{ \left(-\frac{2}{3}, b, \frac{1}{3} \right) \mid b \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 3

zu 1a) $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{(A_{1,2,\bar{2}})} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{3} & \bar{1} & \bar{3} & \bar{3} & \bar{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{(M_{2,\bar{2}})}$

$\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{4} & \bar{4} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix} \xrightarrow{(A_{2,1,\bar{3}})} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{4} & \bar{2} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{2} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{4} \end{pmatrix}$ normierte ZSF,
Kennzahlen $r=1$, $j_1=1$
und $j_2=1$

spezielle Lösung des inhomogenen LGS:

Einträge der letzten Spalte an die Positionen j_1, j_2

$\Rightarrow$ Lösungsvektor $v = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}$

Lösungsmenge des homogenen LGS: $S = \{1, \dots, 5\} \setminus \{j_1, j_2\}$
 $= \{3, 4, 5\} \Rightarrow$ drei Lösungsvektoren

$b_3 = \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, b_4 = \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, b_5 = \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{4} \\ \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \mathcal{L}^{\text{hom}} = \{ \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 + \lambda_5 b_5 \mid \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{F}_5 \}$ (Lösungsmenge
des homogen Systems) und $\mathcal{L} = v + \mathcal{L}^{\text{hom}} = \{ v + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4 + \lambda_5 b_5 \mid \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5 \in \mathbb{F}_5 \}$
(Lösungsmenge des inhom. Systems)

(Beide Systeme haben genau $|\mathcal{L}| = |\mathcal{L}^{\text{hom}}| = 128$ Lösungen.)

zu 1b)

$$\begin{pmatrix} \alpha & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{1} & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{M_{1,\beta} \atop \alpha \cdot \beta = \bar{1}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \beta & \beta \\ \bar{1} & \alpha & \beta \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{1,2} \cdot \bar{1} \atop \begin{smallmatrix} \bar{1} + \bar{1} = \bar{0} \\ \beta + \alpha = \bar{1} \\ \beta + \beta = \bar{0} \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \beta & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix} \xrightarrow{A_{2,1} \cdot \beta \atop \begin{smallmatrix} \beta + \beta = \bar{0} \\ \bar{0} + \beta = \beta \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \beta \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Lösungsmenge $\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} \beta \\ \bar{0} \end{pmatrix} \right\}$