Lineare Algebra

— Lösung Blatt 2 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Es handelt sich um die Äquivalenzklasse der Zahl 35 bezüglich der Relation $\equiv_{23}$, die laut Vorlesung mit der Teilmenge $35 + 23\mathbb{Z} = 12 + 23\mathbb{Z}$ von $\mathbb{Z}$ übereinstimmt.

zu (b) Durch Ausprobieren sieht man, dass das Element $\bar{7} \in \mathbb{F}_{17}$ die Gleichung $\bar{5} \cdot \bar{7} = \overline{35} = \bar{1}$ erfüllt. (Dabei kommt die zweite Gleichung durch die Relation $35 \equiv_{17} 1$ zu Stande, denn $35 - 1 = 34$ ist ein Vielfaches von 17.) Es gilt also $\bar{5}^{-1} = \bar{7}$.

zu (c) Die beiden Elemente $\bar{2} = 2+6\mathbb{Z}$ und $\bar{3} = 3+6\mathbb{Z}$ sind ungleich dem Nullelement, aber ihr Produkt $\bar{2} \cdot \bar{3} = \bar{6} = \bar{0}$ stimmt mit dem Nullelement überein. Aus der Analysis einer Variablen ist bekannt, dass so etwas in einem Körper unmöglich ist. (Alternativ könnte durch Ausprobieren nachgewiesen werden, dass zum Beispiel das Element $\bar{2}$ in $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ keinen Kehrwert besitzt.)

zu (d) Nein. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass für zwei beliebige Vektoren v, w aus der Lösungsmenge $\mathscr{L}^h$ auch die Summe $v + w$ in $\mathscr{L}^h$ enthalten ist. Dies zeigt, dass zum Beispiel $\{(1,2,3),(4,5,6)\}$ keine Lösungsmenge eines reellen homogenen LGS in drei Unbekannten sein kann, da $(1,2,3) + (4,5,6) = (5,7,9)$ nicht in der Menge enthalten ist.

Um die Lösungsmenge an der Koeffizientenmatrix A in normierter ZSF abzulesen, bestimmt man zunächst die Kennzahlen r und $j_1, ..., j_r$ dieser Matrix. Anschließend bildet man die Menge $S = \{1, ..., n\} \setminus \{j_1, ..., j_r\}$. Für jedes $\ell \in S$ erhält man nun einen Lösungsvektor $b_\ell \in K^n$, indem man die ℓ-Position von b_ℓ auf den Wert 1_K setzt und die Einträge der ℓ-ten Spalte von A mit negativem Vorzeichen an die Positionen $j_1, ..., j_r$ von b_ℓ setzt. Alle übrigen Einträge von b_ℓ setzt man auf 0_K. Die Lösungsmenge ist dann gegeben durch

$$\mathscr{L}^h \quad = \quad \left\{ \sum_{\ell \in s} \lambda_\ell v_\ell \;\middle|\; \lambda_\ell \in K \;\forall\, \ell \in S \right\}.$$

Aufgabe 1

zu (a) Die Kennzahlen der Zeilenstufenform lauten $r = 3$, $j_1 = 1$, $j_2 = 3$, $j_3 = 4$. Mit der Notation aus der Vorlesung ist $S = \{1,2,3,4,5\} \setminus \{j_1, j_2, j_3\} = \{2,5\}$. Die zweite bzw. fünfte Spalte der Matrix liefert den Lösungsvektor

$$b_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{bzw.} \quad b_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die gesuchte Lösungsmenge ist somit

$$\mathscr{L}^h = \left\{ \lambda_2 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 7 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_2, \lambda_5 \in \mathbb{R} \right\}.$$

zu (b) Der Lösungsvektor $(-3, 5, 1, 0)$ verrät uns den Aufbau der dritten, der Lösungsvektor $(1, 2, 0, 1)$ den Aufbau der vierten Spalten (denn die 1 befindet sich an der dritten bzw. vierten Position). Weil $S = \{3, 4\}$ zweielementig ist, muss es in der gesuchten normierten ZSF zwei Zeilen ungleich Null geben, und es gilt $\{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j_1, j_2\} = S = \{3, 4\}$. Die Kennzahlen der gesuchten normierten Zeilenstufen sind also $r = 2$, $j_1 = 1$ und $j_2 = 2$. Der Lösungsvektor $b_3 = (-3, 5, 1, 0)$ kommt dadurch zu Stande, dass die Einträge der dritten Spalte an den Stellen j_1, j_2 mit negativem Vorzeichen in den Vektor geschrieben und an der dritten Position eine 1 ergänzt wird. Dadurch erhält man für die dritte Spalte die Form $(3, -5, 0)$. Ebenso kommt man zu dem Ergebnis, dass die vierte Spalten die Form $(-1, -2, 0)$ hat. Die gesuchte Koeffizientenmatrix ist also gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Wir behandeln das LGS mit dem Einsetzungsverfahren. Dazu lösen wir die untere Gleichung zunächst nach x_3 auf.

$$\bar{3}x_3 = \bar{4} - \bar{2}x_1 - \bar{2}x_2 = \bar{4} + \bar{5}x_1 + \bar{5}x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_3 = \bar{5} \cdot (\bar{3}x_3) = \bar{5}(\bar{4} + \bar{5}x_1 + \bar{5}x_2) = \bar{6} + \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2$$

Einsetzen in die erste Gleichung des Systems liefert

$$\bar{6}x_1 + x_2 + \bar{6} \cdot (\bar{6} + \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2) = \bar{1} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{6}x_1 + x_2 + (\bar{1} + \bar{3}x_1 + \bar{3}x_2) = \bar{1} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{2}x_1 + \bar{4}x_2 = \bar{0}.$$

Durch Einsetzen in die zweite Gleichung des Systems erhalten wir

$$\bar{5}x_1 + \bar{6}x_2 + \bar{6} \cdot (\bar{6} + \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2) = \bar{1} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{5}x_1 + \bar{6}x_2 + (\bar{1} + \bar{3}x_1 + \bar{3}x_1) = \bar{1} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + \bar{2}x_2 = \bar{0}$$

Diese Gleichung stimmt bis auf den Faktor $\bar{2}$ mit der bereits bekannten Gleichung $\bar{2}x_1 + \bar{4}x_2 = \bar{0}$ überein; letztere ist also redundant. Die neu erhaltene Gleichung kann zu $x_1 = -\bar{x}_2 = \bar{5}x_2$ umgefort werden, und Einsetzen dieser Gleichung in $x_3 = \bar{6} + \bar{4}x_1 + \bar{4}x_2$ liefert $x_3 = \bar{6} + \bar{3}x_2$. Insgesamt ist das angegebene LGS also äquivalent zu

$$x_1 = \bar{5}x_2 \quad , \quad x_3 = \bar{6} + \bar{3}x_2.$$

Wir erhalten damit die Lösungsmenge

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_7^3 \;\middle|\; x_1 = \bar{5}x_2 \;,\; x_3 = \bar{6} + \bar{3}x_2 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{6} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{1} \\ \bar{3} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{F}_7 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{6} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{5} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{2} \\ \bar{5} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{3} \\ \bar{1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{6} \\ \bar{4} \\ \bar{4} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{5} \\ \bar{0} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{6} \\ \bar{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3

zu (a) Für jedes Element $a + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (mit $a \in \mathbb{Z}$) gilt $\bar{0} + (a + n\mathbb{Z}) = (0 + n\mathbb{Z}) + (a + n\mathbb{Z}) = (0 + a) + n\mathbb{Z} = a + n\mathbb{Z}$. Dies zeigt, dass $\bar{0}$ tatsächlich die Eigenschaft eines Nullelements besitzt. Zum Nachweis des Distributivgesetzes seien $a + n\mathbb{Z}, b + n\mathbb{Z}, c + n\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ vorgegeben, mit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Dann gilt

$$(a + n\mathbb{Z})((b + n\mathbb{Z}) + (c + n\mathbb{Z})) \quad = \quad (a + n\mathbb{Z})((b + c) + n\mathbb{Z}) \quad = \quad a(b + c) + n\mathbb{Z}$$
$$= \quad (ab + ac) + n\mathbb{Z} \quad = \quad (ab + n\mathbb{Z}) + (ac + n\mathbb{Z}) \quad = \quad (a + n\mathbb{Z})(b + n\mathbb{Z}) + (a + n\mathbb{Z})(c + n\mathbb{Z}).$$

Dabei wurde im dritten Schritt verwendet, dass das Distributivgesetz im Ring $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen gültig ist.

zu (b) Seien $(a, b), (c, d), (e, f) \in R$ vorgegeben, mit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}_3$. Dann erhält man das Assoziativgesetz der Addition durch die Rechung

$$((a, b) + (c, d)) + (e, f) \quad = \quad (a + c, b + d) + (e, f) \quad = \quad (a + c + e, b + d + f)$$
$$= \quad (a, b) + (c + e, d + f) \quad = \quad (a + b) + ((c, d) + (e, f)).$$

Für die Verifikation des Assoziativgesetzes der Multiplikation bietet es sich an, die beiden Seiten $((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f)$ und $(a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$ einzeln auszurechnen und zu vergleichen. Einerseits gilt

$$((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) \quad = \quad (ac - bd, ad + bc) \cdot (e, f) \quad = \quad ((ac - bd)e - (ad + bc)f, (ac - bd)f + (ad + bc)e)$$
$$= \quad (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce) \quad ,$$

andererseits aber auch

$$(a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) \quad = \quad (a, b) \cdot (ce - df, cf + de) \quad = \quad (a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df))$$
$$= \quad (ace - adf - bcf - bde, acf + ade + bce - bdf) \quad = \quad (ace - bde - adf - bcf, acf - bdf + ade + bce).$$

Damit ist insgesamt $((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) = (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f))$ nachgewiesen.