Lineare Algebra

— Lösung Blatt 2 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Die Kennzahlen der ZSF lauten $r = 4$, $j_1 = 1$, $j_2 = 3$, $j_3 = 5$, $j_4 = 6$. Mit der Notation aus der Vorlesung ist $S = \{1, ..., 7\} \setminus \{1, 3, 5, 6\} = \{2, 4, 7\}$. Die entsprechenden Lösungsvektoren $b_2, b_4, b_7 \in \mathbb{R}^7$ können nach dem in der Vorlesung angegebenen Schema von der zweiten, vierten und siebten Zeile der Matrix abgelesen werden. Es ist

$$b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad b_7 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Die Lösungsmenge des homogenen LGS $Ax = 0_{\mathbb{R}^4}$ ist somit gegeben durch

$$\mathscr{L}^{\text{hom}} = \{\lambda_2 b_2 + \lambda_4 b_4 + \lambda_7 b_7 \mid \lambda_2, \lambda_4, \lambda_7 \in \mathbb{R}\}.$$

zu (b) Die Vektoren u, v, w haben nicht die Form, die wir für die Angabe der Matrix A brauchen, deshalb werden sie modifiziert. Es sei

$$\tilde{u} = \tfrac{1}{3}u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{v} = v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \tilde{w} = w - v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Nun können wir vorgehen wie in der Tutoriumsaufgabe. Da drei Lösungsvektoren vorgegeben sind, und weil sich in den Vektoren $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ die Einsen an den Positionen 2, 3 und 4 befinden, erhalten wir für die gesuchte Matrix A die zugehörige Menge $S = \{2, 3, 4\}$ und somit $\{2, 3, 4\} = S = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j_1, ..., j_r\}$, also $r = 1$ und $j_1 = 1$. Nun müssen wir die Werte an den Positionen 2, 3 und 4 der ersten Zeile von A nur noch so wählen, dass sich die passenden Lösungsvektoren $b_2 = \tilde{u}$, $b_3 = \tilde{v}$ und $b_4 = \tilde{w}$ ergeben. Die gesuchte Matrix A ist also

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Nach Konstruktion sind $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ in der Lösungsmenge $\mathscr{L}^{\text{hom}} \subseteq \mathbb{R}^4$ des homogenen LGS $Ax = 0_{\mathbb{R}^3}$ enthalten. Damit liegen auch $u = 3\tilde{u}$, v und $w = v + \tilde{w}$ in $\mathscr{L}^{\text{hom}}$.

Aufgabe 2

Durch Umformen der dritten Gleichung erhalten wir

$$x_1 \quad = \quad \bar{2} - (\bar{4}a + \bar{3})x_2 - (\bar{4}a + \bar{3})x_3 \quad = \quad \bar{2} + (a + \bar{2})x_2 + (a + \bar{2})x_3.$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert

$$\bar{2} \cdot (\bar{2} + (a + \bar{2})x_2 + (a + \bar{2})x_3) + \bar{4}x_2 + (\bar{3}a + \bar{1})x_3 = \bar{4} \quad \Leftrightarrow$$
$$\bar{4} + (\bar{2}a + \bar{4})x_2 + (\bar{2}a + \bar{4})x_3 + \bar{4}x_2 + (\bar{3}a + \bar{1})x_3 = \bar{4} \quad \Leftrightarrow \quad (\bar{2}a + \bar{3})x_2 = \bar{0}.$$

Einsetzen in die zweite Gleichung liefert

$$\bar{4} \cdot (\bar{2} + (a + \bar{2})x_2 + (a + \bar{2})x_3) + (\bar{2}a + \bar{1})x_2 + (\bar{3}a + \bar{2})x_3 = \bar{2} \quad \Leftrightarrow$$
$$\bar{3} + (\bar{4}a + \bar{3})x_2 + (\bar{4}a + \bar{3})x_3 + (\bar{2}a + \bar{1})x_2 + (\bar{3}a + \bar{2})x_3 = \bar{2} \quad \Leftrightarrow \quad (a + \bar{4})x_2 + \bar{2}ax_3 = \bar{4}.$$

Wir betrachten nun zunächst den Fall $a = \bar{0}$. Unsere bisherige Rechnung hat ergeben, dass das LGS äquivalent ist zu $x_1 = \bar{2} + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3$, $\bar{3}x_2 = \bar{0}$, $\bar{4}x_2 = \bar{4}$, was zu $x_2 = \bar{2} + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3$, $x_2 = \bar{0}$, $x_2 = \bar{1}$ umgeformt werden kann. Da sich diese Gleichungen widersprechen, ist die Lösungsmenge leer, es gilt also $\mathscr{L}_{\bar{0}} = \varnothing$.

Nun betrachten wir den Fall $a = \bar{1}$. Dann ist das LGS äquivalent zu $x_1 = \bar{2} + \bar{3}x_2 + \bar{3}x_3$, $\bar{2}x_3 = \bar{4}$, was umgeformt werden kann zu

$$x_1 = \bar{2} + \bar{3}x_2 + \bar{3}x_3 \ , \ x_3 = \bar{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \bar{3} + \bar{3}x_2 \ , \ x_3 = \bar{2}.$$

Die Lösungsmenge ist somit gegeben durch

$$\mathscr{L}_{\bar{1}} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^3 \;\middle|\; x_1 = \bar{3} + \bar{3}x_2 \ , \ x_3 = \bar{2} \right\} \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{1} \\ \bar{0} \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{F}_5 \right\}$$
$$= \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{3} \\ \bar{0} \\ \bar{2} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{1} \\ \bar{2} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \bar{4} \\ \bar{2} \\ \bar{2} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{3} \\ \bar{2} \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{4} \\ \bar{2} \end{pmatrix} \right\}.$$

Zum Schluss betrachten wir den Fall $a \in \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$. In diesem Fall ist das LGS äquivalent zu

$$x_1 = \bar{2} + (a + \bar{2})x_2 + (a + \bar{2})x_3 \ , \ (\bar{2}a + 3)x_2 = \bar{0} \ , \ (a + \bar{4})x_2 + \bar{2}ax_3 = \bar{4}.$$

Außerdem gilt $a \neq \bar{0}$ und $\bar{2}a + 3 \neq \bar{0}$. Deshalb kann das LGS umgeformt werden zu $x_2 = \bar{0}$, $x_3 = \bar{2}a^{-1}$, $x_1 = \bar{2} + (a + \bar{2})\bar{2}a^{-1}$. Es gilt somit

$$\mathscr{L}_a \quad = \quad \left\{ \begin{pmatrix} \bar{2} + (a + \bar{2})\bar{2}a^{-1} \\ \bar{0} \\ \bar{2}a^{-1} \end{pmatrix} \right\} \quad ,$$

also im Einzelnen

$$\mathscr{L}_{\bar{2}} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{1} \\ \bar{0} \\ \bar{1} \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \mathscr{L}_{\bar{3}} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{2} \\ \bar{0} \\ \bar{4} \end{pmatrix} \right\} \quad , \quad \mathscr{L}_{\bar{4}} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{0} \\ \bar{0} \\ \bar{3} \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 3

zu (a) Wir überprüfen, dass $(\bar{1}, \bar{0})$ die Eigenschaft eines Einselements in R besitzt. Sei $(a, b) \in R$, mit $a, b \in \mathbb{F}_3$. Dann gilt

$$(\bar{1}, \bar{0}) \cdot (a, b) \quad = \quad (\bar{1} \cdot a - \bar{0} \cdot b, \bar{1} \cdot b + \bar{0} \cdot a) \quad = \quad (a, b).$$

zu (b) Wir berechnen die Potenzen $(\bar{2}, \bar{1})^n$ für $1 \leq n \leq 8$.

$$\begin{aligned}
(\bar{2}, \bar{1})^1 &= (\bar{2}, \bar{1}) \\
(\bar{2}, \bar{1})^2 &= (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^1 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1}) = (\bar{0}, \bar{1}) \\
(\bar{2}, \bar{1})^3 &= (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^2 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{2}) \\
(\bar{2}, \bar{1})^4 &= (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^3 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{0}) \\
(\bar{2}, \bar{1})^5 &= (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^4 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{1}, \bar{2}) \\
(\bar{2}, \bar{1})^6 &= (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^5 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{1}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2}) \\
(\bar{2}, \bar{1})^7 &= (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^6 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{0}, \bar{2}) = (\bar{1}, \bar{1}) \\
(\bar{2}, \bar{1})^8 &= (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^7 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{1}, \bar{1}) = (\bar{1}, \bar{0})
\end{aligned}$$

Dies zeigt, dass alle Elemente von $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ außer $0_R = (\bar{0}, \bar{0})$ als Potenz von $(\bar{2}, \bar{1})$ dargestellt werden können.

zu (c) Um zu zeigen, dass der Ring $\mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ ein Körper, müssen wir überprüfen, dass jedes Element ungleich 0_R einen Kehrwert besitzt. Nach Teil (b) hat jedes solche Element eine Darstellung als Potenz $(\bar{2}, \bar{1})^n$ mit $n \in \{1, 2, ..., 8\}$. Außerdem gilt $(\bar{2}, \bar{1})^8 = (\bar{1}, \bar{0}) = 1_R$. Dies zeigt, dass für jedes solche n das Element $(\bar{2}, \bar{1})^{8-n}$ jeweils der Kehrwert von $(\bar{2}, \bar{1})^n$ ist.

zu (d) In S gilt die Gleichung $(\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{4}) = (\bar{2} \cdot \bar{2} - \bar{1} \cdot \bar{4}, \bar{2} \cdot \bar{4} + \bar{1} \cdot \bar{2}) = (\bar{4} - \bar{4}, \bar{3} + \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{0}) = 0_R$. Es gibt in S also Element ungleich 0_S, deren Produkt gleich 0_S ist. Dies ist in einem Körper nicht möglich. (Wie kommt man auf diese beiden Elemente? Die Addition und Multiplikation in R und S ähnelt den entsprechenden Rechenoperationen in den komplexen Zahlen. In $\mathbb{C}$ gilt $(2 + i)(2 - i) = 5$, und in $\mathbb{F}_5$ gelten die Gleichungen $\bar{5} = \bar{0}$ und $-\bar{1} = \bar{4}$.)

Lösung Globalübungsblatt 2

Aufgabe 3

definiert in der Tutoriumsaufgabe:

Menge $R = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3 = \{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{F}_3 \}$

Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ auf R geg. durch

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Erinnerung: Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$

$$(a + ib) + (c + id) = (a+c) + i(b+d)$$

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

zu (a) gesucht: $1_R \in R$ mit $1_R \cdot (a, b) = (a, b) \ \forall (a, b) \in R$

Für alle $(a, b) \in R$ gilt $(\bar{1}, \bar{0}) \cdot (a, b) = (\bar{1} \cdot a - \bar{0} \cdot b, \bar{1} \cdot b + \bar{0} \cdot a) = (a, b)$.

Also ist $(\bar{1}, \bar{0})$ das Einselement 1_R von R.

zu (b) $(\bar{2}, \bar{1})^1 = (\bar{2}, \bar{1})$

$$(\bar{2}, \bar{1})^2 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^1 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1}) = (\bar{2} \cdot \bar{2} - \bar{1} \cdot \bar{1}, \bar{2} \cdot \bar{1} + \bar{1} \cdot \bar{2}) = (\bar{3}, \bar{4}) = (\bar{0}, \bar{1})$$

$$(\bar{2}, \bar{1})^3 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^2 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{0}, \bar{1}) = (\bar{2}, \bar{2})$$

$$(\bar{2}, \bar{1})^4 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^3 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{2}) = (\bar{2}, \bar{0}) = -(\bar{1}, \bar{0}) = -1_R$$

$$(\bar{2}, \bar{1})^5 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^4 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{0}) = (\bar{1}, \bar{2})$$

$$(\bar{2}, \bar{1})^6 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{2}, \bar{1})^5 = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot (\bar{1}, \bar{2}) = (\bar{0}, \bar{2})$$

$(\bar{2},\bar{1})^7 = (\bar{2},\bar{1})\cdot(\bar{2},\bar{1})^6 = (\bar{2},\bar{1})\cdot(\bar{0},\bar{2}) = (\bar{1},\bar{1})$

$(\bar{2},\bar{1})^8 = (\bar{2},\bar{1})\cdot(\bar{2},\bar{1})^7 = (\bar{2},\bar{1})\cdot(\bar{1},\bar{1}) = (\bar{1},\bar{0}) = 1_R$

Ergebnis: $R\setminus\{0_R\} = \{(\bar{2},\bar{1})^1, (\bar{2},\bar{1})^2, \ldots, (\bar{2},\bar{1})^8\}$

zu (c) zu überprüfen: (i) $1_R \neq 0_R$

(ii) Jedes $\alpha \in R\setminus\{0_R\}$ hat einen Kehrwert, d.h. es gibt ein $\beta \in R$ mit $\alpha\cdot\beta = 1_R$.

zu (i) $1_R = (\bar{1},\bar{0})$, $0_R = (\bar{0},\bar{0}) \Rightarrow 1_R \neq 0_R$

zu (ii) Sei $\alpha \in R\setminus\{0_R\}$. Teil (b) $\Rightarrow \exists\, m \in \{1,\ldots,8\}$ mit $\alpha = (\bar{2},\bar{1})^m$, außerdem $(\bar{2},\bar{1})^8 = 1_R$

Sei $\beta = (\bar{2},\bar{1})^{8-m}$. Dann gilt $\alpha\cdot\beta = (\bar{2},\bar{1})^m\cdot(\bar{2},\bar{1})^{8-m} = (\bar{2},\bar{1})^8 = 1_R$.

Also ist β der Kehrwert von α.

zu (d) [Vorüberlegung: In $\mathbb{C}$ gilt $(2+i)(2-i) = 5$, in $\mathbb{F}_5$ fallen 5 und 0 zusammen. In $\mathbb{F}_5\times\mathbb{F}_5$ entspricht $2+i$ dem Element $(\bar{2},\bar{1})$, $2-i$ dem Element $(\bar{2},-\bar{1}) = (\bar{2},\bar{4})$.

$\rightsquigarrow$ Idee: multipliziere diese beiden Elemente.]

Es gilt $0_S = (\bar{0},\bar{0})$, $(\bar{2},\bar{1}) \neq 0_S$, $(\bar{2},\bar{4}) \neq 0_S$,

aber $(\bar{2},\bar{1})\cdot(\bar{2},\bar{4}) = (\bar{2}\cdot\bar{2}-\bar{1}\cdot\bar{4}, \bar{2}\cdot\bar{4}+\bar{1}\cdot\bar{2}) = (\bar{0},\overline{10})$

$= (\bar{0},\bar{0}) = 0_S$. Wäre S ein Körper, dann müsste das Produkt zweier Elemente $\neq 0_S$ wieder ungleich 0_S sein. $\square$

Aufgabe 1

zu (a) Kennzahlen der normierten ZSF:

$r = 4, \quad j_1 = 1, \quad j_2 = 3, \quad j_3 = 5, \quad j_4 = 6$

$S = \{1, \dots, 7\} \setminus \{j_1, j_2, j_3, j_4\} = \{2, 4, 7\}$

$\Rightarrow |S| = 3$ Lösungsvektoren

$$b_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad b_7 = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \\ 4 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{hom} = \{\lambda_2 b_2 + \lambda_4 b_4 + \lambda_7 b_7 \mid \lambda_2, \lambda_4, \lambda_7 \in \mathbb{R}\}$$

zu (b) Wir betrachten an Stelle von u, v, w die Vektoren

$$\tilde{u} = \frac{1}{3} u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{v} = v, \quad \tilde{w} = w - v = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Die Einsen befinden sich an den Positionen 2, 3, 4.

$\Rightarrow$ betrachte $S = \{2, 3, 4\}$ $\Rightarrow$ In der gesuchten Matrix muss es $r = 1$ Zeilen ungleich 0 geben (da $4 - 1 = 3 = |S|$).

$\{2, 3, 4\} = S = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{j_1\} \Rightarrow j_1 = 1$

$\Rightarrow$ Die gesuchte Matrix muss in normierter ZSF mit den Kennzahlen $r = 1$, $j_1 = 1$ sein.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\tilde{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ übernimmt die Rolle des Lösungsvektors b_2

Eintrag 2 an der Stelle $j_1 = 1$ $\Rightarrow$ Die Matrix hat in der zweiten Spalte an Position 1 den Eintrag -2

Analoge Vorgehensweise für die dritte und vierte Spalte.

Nach Konstruktion liegen $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$ in der Lösungsmenge $\mathcal{L}^{hom} \subseteq \mathbb{R}^4$. Damit sind auch $u = 3\tilde{u}$, $v = \tilde{v}$ und $w = \tilde{v} + \tilde{w}$ in $\mathcal{L}^{hom}$ enthalten. $\square$

Aufgabe 2

Umformen der 3. Gleichung nach x_1 $\Rightarrow$

$$x_1 = \bar{2} - (\bar{4}a + \bar{3})x_2 - (\bar{4}a + \bar{3})x_3 = \bar{2} + (a + \bar{2})x_2 + (a + \bar{2})x_3$$

Einsetzen in die 1. Gleichung $\Rightarrow$

$$\bar{2} \cdot (\bar{2} + (a + \bar{2})x_2 + (a + \bar{2})x_3) + \bar{4}x_2 + (\bar{3}a + \bar{1})x_3 = \bar{4}$$

$$\Leftrightarrow \bar{4} + (\bar{2}a + \bar{4} + \bar{4})x_2 + (\bar{2}a + \bar{4} + \bar{3}a + \bar{1})x_3 = \bar{4}$$

$$\Leftrightarrow \bar{4} + (\bar{2}a + \bar{3})x_2 = \bar{4} \Leftrightarrow (\bar{2}a + \bar{3})x_2 = \bar{0}$$

Einsetzen in die 2. Gleichung $\Rightarrow$

$$\bar{4} \cdot (\bar{2} + (a+\bar{2})x_2 + (a+\bar{2})x_3) + (\bar{2}a+\bar{1})x_2 + (\bar{3}a+\bar{2})x_3 = \bar{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \dots \Leftrightarrow \quad (a+\bar{4})x_2 + \bar{2}a x_3 = \bar{4}$$

Ergebnis bisher: Das geg. LGS ist äquivalent zu

$$x_1 = \bar{2} + (a+\bar{2})x_2 + (a+\bar{2})x_3$$
$$(\bar{2}a+\bar{3})x_2 = \bar{0}$$
$$(a+\bar{4})x_2 + \bar{2}a x_3 = \bar{4}$$

<u>1. Fall:</u> $a = \bar{0}$

Dann ist das LGS äquivalent zu

$$x_1 = \bar{2} + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3, \quad \bar{3}x_2 = \bar{0}, \quad \bar{4}x_2 = \bar{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 = \bar{2} + \bar{2}x_2 + \bar{2}x_3, \quad x_2 = \bar{0}, \quad x_2 = \bar{1}$$

2. und 3. Gleichung widersprechen sich $\Rightarrow$ LGS unlösbar

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L}_{\bar{0}} = \emptyset$$

<u>2. Fall:</u> $a = \bar{1}$

Dann ist das LGS äquivalent zu

$$x_1 = \bar{2} + \bar{3}x_2 + \bar{3}x_3, \quad \bar{2}x_3 = \bar{4} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \bar{2} + \bar{3}x_2 + \bar{3}x_3, \quad x_3 = \bar{3} \cdot \bar{4} = \overline{12} = \bar{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$x_1 = \bar{2} + \bar{3}x_2 + \bar{3} \cdot \bar{2}, \quad x_3 = \bar{2} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \bar{3} + \bar{3}x_2, \quad x_3 = \bar{2}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_{\bar 1} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_5^3 \;\middle|\; x_1 = \bar 3 + \bar 3 x_2 ,\ x_3 = \bar 2 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \bar 3 + \bar 3 x_2 \\ x_2 \\ \bar 2 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{F}_5 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar 3 \\ \bar 0 \\ \bar 2 \end{pmatrix} + x_2 \cdot \begin{pmatrix} \bar 3 \\ \bar 1 \\ \bar 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2 \in \mathbb{F}_5 \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} \bar 3 \\ \bar 0 \\ \bar 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar 1 \\ \bar 1 \\ \bar 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar 4 \\ \bar 2 \\ \bar 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar 2 \\ \bar 3 \\ \bar 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \bar 0 \\ \bar 4 \\ \bar 2 \end{pmatrix} \right\}$$

<u>3. Fall:</u> $a \neq \bar 0, \bar 1$, d.h. $a \in \{\bar 2, \bar 3, \bar 4\}$

In diesem Fall gilt $\bar 2 a + \bar 3 \neq \bar 0$, $a + \bar 4 \neq \bar 0$, $a \neq \bar 0$,
deshalb kann das LGS folgendermaßen umgeformt werden:

$$\begin{aligned} x_1 &= \bar 2 + (a+\bar 2)x_2 + (a+\bar 2)x_3 \\ (\bar 2 a + \bar 3)x_2 &= \bar 0 \\ (a+\bar 4)x_2 + \bar 2 a x_3 &= \bar 4 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \bar 2 + (a+\bar 2)x_2 + (a+\bar 2)x_3 \\ x_2 &= \bar 0 \\ \bar 2 a x_3 &= \bar 4 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \bar 2 + (a+\bar 2)x_2 + (a+\bar 2)x_3 \\ x_2 &= \bar 0 \\ x_3 &= \bar 2^{-1} \cdot a^{-1} \cdot \bar 4 = a^{-1} \cdot \overline{12} = \bar 2 a^{-1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= \bar 2 + \bar 2 a^{-1}(a + \bar 2) \\ x_2 &= \bar 0, \quad x_3 = \bar 2 a^{-1} \end{aligned}$$

also: $\mathcal{L}_{\bar 2} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar 2 + \bar 2 \cdot \bar 2^{-1} \cdot \bar 4 \\ \bar 0 \\ \bar 2 \cdot \bar 3 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar 1 \\ \bar 0 \\ \bar 1 \end{pmatrix} \right\}$

analog: $\mathcal{L}_{\bar 3} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar 2 \\ \bar 0 \\ \bar 4 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathcal{L}_{\bar 4} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar 0 \\ \bar 0 \\ \bar 3 \end{pmatrix} \right\}$