Lineare Algebra

— Lösung Blatt 0 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_3 &= 8 & x_1 + \frac{2}{3}x_3 &= \frac{8}{3} \\ -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -3 & \Leftrightarrow -x_1 + 2x_2 + 5x_3 &= -3 \\ 7x_2 - 2x_3 &= -23 & 7x_2 - 2x_3 &= -23 \\ \Leftrightarrow x_1 + \frac{2}{3}x_3 &= \frac{8}{3} & x_1 + \frac{2}{3}x_3 &= \frac{8}{3} \\ 2x_2 + \frac{17}{3}x_3 &= -\frac{1}{3} & \Leftrightarrow x_2 + \frac{17}{6}x_3 &= -\frac{1}{6} \\ 7x_2 - 2x_3 &= -23 & 7x_2 - 2x_3 &= -23 \\ \Leftrightarrow x_1 + \frac{2}{3}x_3 &= \frac{8}{3} & x_1 + \frac{2}{3}x_3 &= \frac{8}{3} \\ x_2 + \frac{17}{6}x_3 &= -\frac{1}{6} & \Leftrightarrow x_2 + \frac{17}{6}x_3 &= -\frac{1}{6} \\ -\frac{131}{6}x_3 &= -\frac{131}{6} & x_3 &= 1 \\ x_1 &= 2 \\ \Leftrightarrow x_2 &= -3 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Die gesuchte Lösungsmenge ist also $\mathcal{L} = \{(2, -3, 1)\}$.

Aufgabe 2

zu (a) Wegen $2 \mid (0 - 0)$ gilt $0 \equiv_2 0$, und folglich ist $0_R = 0 = 0 + i \cdot 0$ in I enthalten. Seien nun $\alpha, \beta \in I$ und $r \in R$ vorgegeben. Dann gibt es $a, b, c, d, s, t \in \mathbb{Z}$ mit $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$, $r = s + it$ und außerdem $a \equiv_2 b$ und $c \equiv_2 d$. Es ist $\alpha + \beta = (a + c) + i(b + d)$. Aus $a \equiv_2 b$ und $c \equiv_2 d$ folgt $2 \mid (a - b)$ und $2 \mid (c - d)$. Mit $a - b$ und $c - d$ ist auch die Zahl $(a - b) + (c - d) = (a + c) - (b + d)$ gerade, es gilt somit $2 \mid ((a + c) - (b + d))$, also $a + c \equiv_2 b + d$ und damit $\alpha + \beta \in I$. Weiter gilt

$$r\alpha = (s + it)(a + ib) = (sa - tb) + i(ta + sb)$$

und $(sa - tb) - (ta + sb) = (s - t)a + (-s - t)b = (s - t)a + (t - s)b - 2tb = (s - t)(a - b) - 2tb$. Mit $a - b$ ist auch die Zahl $(s - t)(a - b) - 2tb$ gerade, es gilt also $(sa - tb) \equiv_2 (ta + sb)$ und somit $r\alpha \in I$.

zu (b) Nehmen wir an, J ist ein Ideal in R mit $I \subsetneq J \subsetneq R$. Dann gibt es mindestens ein $\alpha \in J \setminus I$. Schreibe wir $\alpha = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$, dann ist $a \equiv_2 b$ wegen $\alpha \notin I$ nicht erfüllt. Die Zahl $a - b$ ist somit ungerade, die Zahl $a - 1 - b$ dagegen gerade. Daraus wiederum folgt $a - 1 \equiv_2 b$ und $\alpha - 1 = (a - 1) + ib \in I$. Auf Grund der Idealeigenschaft von I ist mit $\alpha - 1$ auch $(-1)(\alpha - 1)$ in I enthalten, und wegen $I \subseteq J$ folgt $(-1)(\alpha - 1) \in J$. Aus $\alpha \in J$ und $(-1)(\alpha - 1) \in J$ folgt $\alpha + (-1)(\alpha - 1) = \alpha - \alpha + 1 = 1 \in J$. Aber mit 1 ist auch jedes $\beta \in R$ in J enthalten, denn aus $1 \in J$ und $\beta \in R$ folgt $\beta = \beta \cdot 1 \in R$, auf Grund der Idealeigenschaft von J . Es gilt also $J = R$, im Widerspruch zur Annahme $J \subsetneq R$.

zu (c) Wir müssen zeigen, dass S reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

Reflexivität: Sei $a \in S$. Weil I ein Ideal ist, gilt $a - a = 0_R \in I$. Daraus folgt $(a, a) \in S$, also aSa .

Symmetrie: Seien $a, b \in R$ mit aSb vorgegeben. Dann gilt $(a, b) \in S$, also $a - b \in I$. Aus $-1_R \in R$ und $a - b \in I$ folgt $b - a = (-1_R)(a - b) \in I$ (da I ein Ideal ist), also $(b, a) \in S$, was gleichbedeutend mit bSa ist.

Transitivität: Seien $a, b, c \in R$ mit aSb und bSc vorgegeben. Dann gilt $(a, b) \in S$ und $(b, c) \in S$, also $a - b \in I$ und $b - c \in I$. Die Idealeigenschaft von I liefert $a - c = (a - b) + (b - c) \in I$ und somit $(a, c) \in I$, also aSc .

Aufgabe 3

zu (a) Sei $c = (c_1, c_2)$ eine Lösung des homogenen LGS mit $c \neq (0, 0)$. Dann gilt

$$a_{11}c_1 + a_{12}c_2 = 0 \quad (1)$$

$$a_{21}c_1 + a_{22}c_2 = 0 \quad (2)$$

Multiplikation von (1) mit a_{22} und von (2) mit a_{12} liefert

$$a_{11}a_{22}c_1 + a_{12}a_{22}c_2 = 0 \quad (3)$$

$$a_{12}a_{21}c_1 + a_{12}a_{22}c_2 = 0 \quad (4)$$

Durch Subtraktion der Gleichung (4) von (3) erhält man $a_{11}a_{22}c_1 - a_{12}a_{21}c_1 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})c_1 = 0$. Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall: $c_1 \neq 0$

Dann folgt $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, also $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$.

2. Fall: $c_1 = 0$

In diesem Fall muss $c_2 \neq 0$ sein (wegen $c \neq 0$). Multiplikation von (1) mit a_{21} und von (2) mit a_{11} liefert

$$a_{11}a_{21}c_1 + a_{12}a_{21}c_2 = 0 \quad (5)$$

$$a_{11}a_{21}c_1 + a_{11}a_{22}c_2 = 0 \quad (6)$$

Subtraktion der Gleichung (5) von (6) liefert $a_{11}a_{22}c_2 - a_{12}a_{21}c_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})c_2 = 0$ und somit wiederum $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$, also $a_{11}a_{22} = a_{12}a_{21}$.

zu (b) Wir beweisen die Aussage durch Kontraposition und nehmen an, dass das homogene LGS höchstens endlich viele Lösungen besitzt. Wir zeigen, dass unter dieser Annahme das inhomogene LGS lösbar ist und unterscheiden wieder zwei Fälle.

1. Fall: $a_{11} \neq 0$

Wir wenden die folgenden Umformungsschritte auf das LGS an.

$$\begin{aligned} \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{array} & \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{11}a_{21}x_1 + a_{11}a_{22}x_2 = a_{11}b_2 \end{array} \\ \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1 \end{array} & \Leftrightarrow \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ \delta x_2 = b'_2 \end{array} \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt zur Abkürzung $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ und $b'_2 = b_2 - a_{21}b_1$ gesetzt wurde.

Wäre $\delta = 0$, dann hätte das umgeformte *homogene* LGS die Gestalt

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = 0 \quad , \quad 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$$

und somit die unendliche Lösungsmenge $\mathcal{L}^h = \{((- \frac{a_{21}}{a_{11}})c, c) \mid c \in \mathbb{R}\}$, im Widerspruch zur Annahme. So aber muss $\delta \neq 0$ sein, und wir können das inhomogene LGS umformen zu

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \quad , \quad x_2 = \delta^{-1}b'_2 &\Leftrightarrow a_{11}x_1 + a_{12}\delta^{-1}b'_2 = b_1 \quad , \quad x_2 = \delta^{-1}b'_2 \quad \Leftrightarrow \\ a_{11}x_1 = b_1 - \frac{a_{12}b'_2}{\delta} \quad , \quad x_2 = \delta^{-1}b'_2 &\Leftrightarrow x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}b'_2}{a_{11}\delta} \quad , \quad x_2 = \delta^{-1}b'_2. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Lösungsmenge des inhomogenen LGS nicht leer ist.

2. Fall: $a_{11} = 0$

In diesem Fall hat das homogene LGS die Form $a_{12}x_2 = 0$ und $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$. Ist $a_{12} = 0$, dann ist dieses LGS äquivalent zur Gleichung $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = 0$, und diese besitzt unendlich viele Lösungen, da der Wert für x_2 frei gewählt und anschließend ein passender Wert von x_1 für die Gleichung $a_{21}x_1 = -a_{22}x_2$ bestimmt werden kann. Im Fall $a_{21} = 0$ hat das homogene LGS die Form $a_{12}x_2 = 0$ und $a_{22}x_2 = 0$. Wieder gibt es unendlich viele Lösungen, nämlich $(c, 0)$ mit $c \in \mathbb{R}$ beliebig.

Weil wir aber in den Voraussetzungen ausgeschlossen haben, dass das homogene LGS unendlich viele Lösungen besitzt, muss $a_{12} \neq 0$ und $a_{21} \neq 0$ gelten. Das inhomogene LGS hat dann die Form $a_{12}x_2 = b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ und kann zu $x_2 = \frac{b_1}{a_{12}}$, $x_1 = a_{21}^{-1}(b_2 - \frac{a_{22}b_1}{a_{12}})$ aufgelöst werden. Wiederum ist die Lösungsmenge des inhomogenen LGS also nicht leer.