

Lineare Algebra

— Lösung Blatt 0 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Ein Element $\lambda \in K$ wird *Eigenwert* genannt, wenn ein Vektor $v \in V \setminus \{0_V\}$ mit $\phi(v) = \lambda v$ existiert. Ein Vektor $v \in V$ heißt *Eigenvektor*, wenn $v \neq 0_V$ und $\phi(v) = \lambda v$ für ein $\lambda \in K$ erfüllt ist.

zu (b) Für jeden Vektor $v \in V \setminus \{0_V\}$ gilt $\text{id}_V(v) = v = 1 \cdot v$. Dies zeigt, dass im Fall $V \neq \{0_V\}$ die 1 der einzige Eigenwert von id_V ist. (Im Fall $V = \{0_V\}$ besitzt der Endomorphismus id_V keine Eigenwerte.)

zu (c) Würde man den Nullvektor in der Eigenwertdefinition nicht ausschließen, dann würde sich für jedes $\lambda \in K$ aus der Gleichung $\phi(0_V) = 0_V = \lambda \cdot 0_V$ ergeben, dass λ ein Eigenwert von ϕ ist. Damit wäre also grundsätzlich jedes Element von K ein Eigenwert von ϕ , was die Definition sinnlos machen würde.

zu (d) Hier könnte man zum Beispiel die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $v \mapsto 0_{\mathbb{R}^3}$ nehmen. Die Gleichung $\phi(e_1) = 0_{\mathbb{R}^3} = 0 \cdot e_1$ zeigt, dass 0 tatsächlich ein Eigenwert von ϕ ist. (Natürlich könnte man an Stelle von e_1 auch jeden anderen Vektor $\neq 0_{\mathbb{R}^3}$ für den Nachweis verwenden. An Stelle der Nullabbildung hätte man auch irgendeine andere lineare Abbildung $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\ker(\psi) \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ nehmen können.)

zu (e) Nein. Ist ϕ ein Endomorphismus von $\mathbb{R}^3$ mit Eigenwert 0, dann gibt es einen Vektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ mit $\phi(v) = 0 \cdot v = v$. Somit ist v ein Element von $\ker(\phi) \setminus \{0_{\mathbb{R}^3}\}$. Eine lineare Abbildung ist aber genau dann injektiv, wenn deren Kern nur aus dem Nullvektor besteht.

Aufgabe 1

zu (a) Weil A, B ähnlich zueinander sind, gibt es eine Matrix $T \in \text{GL}_n(K)$ mit $B = TAT^{-1}$. Wegen $T \in \text{GL}_n(K)$ gilt $\det(T) \neq 0$, und aus $\det(T) \det(T^{-1}) = \det(TT^{-1}) = \det(E^{(n)}) = 1$ folgt $\det(T^{-1}) = \det(T)^{-1}$. Damit wiederum erhalten wir

$$\det(B) = \det(TAT^{-1}) = \det(T) \det(A) \det(T^{-1}) = \det(T) \det(A) \det(T)^{-1} = \det(A).$$

zu (b) Sei λ ein Eigenwert von A . Dann gibt es einen Vektor $v \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$ mit $Av = \lambda v$. Weil T

invertierbar ist, gilt $\ker(T) = \{0_{K^n}\}$ und somit $Tv \neq 0_{K^n}$. Die Gleichung

$$B(Tv) = (TAT^{-1})(Tv) = TAv = T(\lambda v) = \lambda(Tv)$$

zeigt somit, dass λ ein Eigenwert von B ist.

Nun ist mit T auch $U = T^{-1}$ ein Element aus $\text{GL}_n(K)$, und die Gleichung $TAT^{-1} = B$ ist äquivalent zu $A = T^{-1}BT = UBU^{-1}$. Also kann genauso gezeigt werden, dass jeder Eigenwert von B auch ein Eigenwert von A ist. Insgesamt haben A und B also dieselben Eigenwerte.

zu (c) Sei $A \in \text{GL}_n(K)$ und λ ein Eigenwert von A . Sei außerdem $v \in K^n \setminus \{0_{K^n}\}$ ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ . Wäre $\lambda = 0$, dann würde aus $Av = 0 \cdot v = 0_{K^n}$ folgen, dass v im Kern von A liegt. Es wäre also $\ker(A) \neq \{0_{K^n}\}$, also $\dim \ker(A) > 0$ und damit $\text{rg}(A) < n$ auf Grund des Dimensionssatzes. Damit wäre A nicht invertierbar, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Also ist $\lambda \neq 0$. Die Gleichung $Av = \lambda v$ kann umgeformt werden zu $AA^{-1}v = A^{-1}(\lambda v) \Leftrightarrow E^{(n)}v = \lambda(A^{-1}v) \Leftrightarrow v = \lambda(A^{-1}v) \Leftrightarrow A^{-1}v = \lambda^{-1}v$. Somit ist λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1} .

Aufgabe 2

zu (a) Zunächst bestimmen wir mit der Sarrus-Regel das charakteristische Polynom.

$$\begin{aligned}\chi_A &= \det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & -2 \\ 8 & x+1 & -4 \\ -4 & 0 & x+3 \end{pmatrix} = \\ & (x-3)(x+1)(x+3) + 0 + 0 - (-4)(x+1)(-2) - 0 - 0 = x^3 + x^2 - 17x - 17.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen finden wir die Nullstelle -1 . Also ist $x+1$ ein Linearfaktor von χ_A . Polynomdivision liefert $\chi_A = (x+1)(x^2 - 17) = (x+1)(x - \sqrt{17})(x + \sqrt{17})$. Die Eigenwerte sind also -1 und $\pm\sqrt{17}$.

zu (b) Der Eigenraum zum Eigenwert -1 ist der Kern der Matrix $A + E^{(3)}$, der mit dem Gauß-Algorithmus ausgerechnet werden kann.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -8 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die letzte Matrix entspricht dem Gleichungssystem $x_1 = x_3 = 0$. Somit ist x_2 zwei wählbar, und $\{(0, 1, 0)\}$ ist eine Basis des Lösungsraums. Damit ist $\{(0, 1, 0)\}$ auch eine Basis von $\text{Eig}(A, -1)$. Zur Probe überprüfen wir

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nach demselben Verfahren berechnen wir $\text{Eig}(A, \sqrt{17}) = \ker(A - \sqrt{17} \cdot E^{(3)})$.

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 3 - \sqrt{17} & 0 & 2 \\ -8 & -1 - \sqrt{17} & 4 \\ 4 & 0 & -3 - \sqrt{17} \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ -8 & -1 - \sqrt{17} & 4 \\ 3 - \sqrt{17} & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto \\ &\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ 0 & -1 - \sqrt{17} & -2 - 2\sqrt{17} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die letzte Matrix entspricht dem LGS bestehend aus den Gleichungen $x_1 + (-\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17})x_3 = 0$, $x_2 + 2x_3 = 0$. Damit ist x_3 frei wählbar, und $\{(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17}, -2, 1)\}$ ist sowohl eine Basis des Lösungsraums als auch eine Basis von $\text{Eig}(A, \sqrt{17})$. Die Probe zeigt, dass richtig gerechnet wurde:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} + \frac{3}{4}\sqrt{17} \\ -2\sqrt{17} \\ \sqrt{17} \end{pmatrix} = \sqrt{17} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich berechnen wir noch $\text{Eig}(A, \sqrt{17}) = \ker(A - \sqrt{17} \cdot E^{(3)})$.

$$\begin{pmatrix} 3 + \sqrt{17} & 0 & 2 \\ -8 & -1 + \sqrt{17} & 4 \\ 4 & 0 & -3 + \sqrt{17} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ -8 & -1 + \sqrt{17} & 4 \\ 3 + \sqrt{17} & 0 & 2 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ 0 & -1 + \sqrt{17} & -2 - 2\sqrt{17} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die letzte Matrix entspricht dem LGS bestehend aus den Gleichungen $x_1 + (-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{17})x_3 = 0$, $x_2 + 2x_3 = 0$. Damit ist x_3 frei wählbar, und $\{(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17}, -2, 1)\}$ ist sowohl eine Basis des Lösungsraums als auch eine Basis von $\text{Eig}(A, \sqrt{17})$. Auch hier machen wir die Probe:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -8 & -1 & 4 \\ 4 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{17}{4} - \frac{3}{4}\sqrt{17} \\ 2\sqrt{17} \\ \sqrt{17} \end{pmatrix} = (-\sqrt{17}) \begin{pmatrix} \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\sqrt{17} \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3

zu (a) Das charakteristische Polynom von A ist gegeben durch

$$\chi_A = \det(xE^{(2)} - A) = \det \begin{pmatrix} x - a & b \\ -b & x - a \end{pmatrix} = (x - a)^2 + b^2.$$

Dieses Polynom besitzt keine reellen Nullstellen, denn wegen $b \neq 0$ gilt für alle $c \in \mathbb{R}$ jeweils $\chi_A(c) = (x - c)^2 + b^2 \geq b^2 > 0$. Für jedes $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt die Äquivalenz

$$\begin{aligned} \chi_A(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow (\alpha - a)^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - a)^2 - (ib)^2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha - a - ib)(\alpha - a + ib) = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha \in \{a \pm ib\}. \end{aligned}$$

Also sind $a \pm ib$ die beiden komplexen Eigenwerte von A .

zu (b) Wir bestimmen eine Basis von $\text{Eig}(A, a + ib) = \ker(A - (a + ib)E^{(2)})$ durch Anwendung des Gauß-Algorithmus.

$$\begin{pmatrix} -ib & -b \\ b & -ib \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -i \\ b & -ib \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Kennzahlen der normierten ZSF sind $r = 1$, $j_1 = 1$. Es ist $S = \{2\}$, und folglich wird der Untervektorraum $\ker(A - (a + ib)E^{(2)}) \leq \mathbb{C}^2$ von $b_2 = (i, 1)$ erzeugt. Durch die Proberechnung

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b + ia \\ a + ib \end{pmatrix} = (a + ib) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

wird bestätigt, dass $(i, 1)$ tatsächlich ein Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda = a + ib$ der Matrix A ist. Ebenso zeigt die Rechnung

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b - ia \\ a - ib \end{pmatrix} = (a - ib) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$$

dass $(-i, 1)$ ein Eigenvektor zum Eigenwert $\bar{\lambda} = a - ib$ ist.

zu (c) Wir definieren die Matrix T , indem wir die beiden Eigenvektoren als Spalten eintragen, also

$$T = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Es ist dann

$$T^{-1} = \det(T)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = (2i)^{-1} \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = (-\tfrac{1}{2}i) \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & i \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1}AT = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \tfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b+ia & -b-ia \\ a+ib & a-ib \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}.$$

Nehmen wir nun an, dass eine Matrix $T \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ existiert, so dass $D = T^{-1}AT$ eine Diagonalmatrix ist. Mit A und T ist dann auch D in $\mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$ enthalten, es gilt also $D = \text{diag}(c, d)$ mit $c, d \in \mathbb{R}$. Das charakteristische Polynom χ_D ist dann gleich $(x - c)(x - d)$, besitzt also die reellen Nullstellen c, d . Da ähnliche Matrizen laut Vorlesung dasselbe charakteristische Polynom haben, wären c, d auch Nullstellen von χ_A . Aber wir haben in Teil (a) gesehen, dass χ_A keine reellen Nullstellen besitzt.