

Lineare Algebra

— Lösung Blatt 0 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Sei $A \in \mathcal{M}_{n,K}$. Addiert man das λ -fache der k -ten Zeile zur ℓ -ten Zeile (wobei $\lambda \in K$ und $k \neq \ell$ ist), so ändert sich die Determinante nicht. Multipliziert man die k -te Zeile mit einem Wert $\lambda \in K^\times$, so wird dadurch $\det(A)$ mit dem Wert λ multipliziert. (Bei der Vertauschung zweier Zeilen ändert sich das Vorzeichen der Determinante, sie wird also mit dem Wert -1 multipliziert. Eine Vertauschung ist aber keine elementare, sondern eine aus mehreren elementaren Zeilenumformungen zusammengesetzte Umformung.) Die Anwendung einer elementaren Spaltenumformung auf A hat denselben Effekt, als wenn A durch ${}^t A$ ersetzt, dort die entsprechende Zeilenumformung durchführt, und anschließend die Matrix A nochmals transponiert. Da der Übergang zur Transponierten die Determinante nach Satz (12.18) nicht ändert, ist der Effekt einer elementaren Spaltenumformung also derselbe wie bei der entsprechenden elementaren Zeilenumformung.

zu (b) Für $i, j \in M_n$ sei jeweils $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1,K}$ die Matrix, die aus A durch Streichung der i -ten Zeile und der j -ten Spalte entsteht. Dann ist der Eintrag von $\tilde{A}$ an der Position (i, j) jeweils gegeben durch $\tilde{a}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ji})$.

zu (c) Die zu A adjunkte Matrix ist gegeben durch

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wie man sich leicht überzeugt, gilt $A\tilde{A} = (-2)E^{(2)}$.

zu (d) Für eine einmalige Anwendung der Sarrus-Regel benötigt man 12 Multiplikationen und 5 Additionen (da insgesamt 6 Summanden gebildet und addiert werden müssen), insgesamt also 17 Rechenoperationen. Für die Entwicklung einer 4×4 -Determinante zu einer Zeile oder Spalte müssen vier 3×3 -Determinanten ausgerechnet, mit einem Vorfaktor multipliziert und anschließend noch zusammengeordnet werden. Auf diese Weise kommt man zu $4 \cdot 18 + 3 = 75$ Rechenoperationen.

Um eine 4×4 -Matrix auf normierte Zeilenstufenform zu bringen, benötigt man 3 Operationen, um den Eintrag links oben auf 1 zu bringen (Multiplikation der ersten Zeile mit a_{11}^{-1} ; eventuell vorher notwendige Zeilenvertauschungen zählen wir nicht als mit). Anschließend brauchen wir noch 9 Operationen, um die Einträge in der Spalte darunter zu 0 zu machen, insgesamt also 12 Operationen für die erste Spalte. Bei der zweiten Spalte benötigt dasselbe Verfahren noch $2 + 4 = 6$ Operationen, bei der dritten Spalte noch $1 + 1 = 2$ Operationen. Das anschließende Multiplizieren der bei den einzelnen Operationen angefallenden Faktoren, um die gesamte Änderung der Determinante durch das Gauß-Verfahren zu bestimmen, erfordert 3 weitere Operationen. Insgesamt kommen wir so auf $12 + 6 + 2 + 3 = 23$ Operationen. (Das Gauß-Verfahren funktioniert also deutlich schneller als die Berechnung mit dem Laplace'schen Entwicklungssatz. Bei größeren Matrizen wird das Verhältnis noch extremer. Allerdings kann die Anwendung des Laplace'schen Entwicklungssatzes günstiger sein, wenn die Matrix viele Nulleinträge besitzt.)

Aufgabe 1

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & -2 & 1 \\ 7 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 3 & -14 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 3 & -14 & -6 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & -\frac{43}{2} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \xrightarrow{*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{43}{2} & -\frac{15}{2} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{10} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{21}{20} \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\tilde{A}$ nach dem letzten Umformungsschritt ist eine obere Dreiecksmatrix mit Determinante $\det(\tilde{A}) = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-\frac{21}{20}) = -\frac{21}{20}$. Die erste mit * markierte Umformung bewirkte eine Multiplikation der Matrix mit dem Faktor $\frac{1}{2}$, die zweite *-Umformung eine Multiplikation mit Faktor $-\frac{1}{10}$. Es gilt also $\det(A) = (-1)(-10)\det(\tilde{A}) = (-10) \cdot (-\frac{21}{20}) = 21$.

Aufgabe 2

zu (a)

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

zu (b) Für $n = 1$ ist die Gleichung erfüllt, denn es gilt $A_1 = (1)$ und somit $\det(A_1) = 1 = (-1)^{\frac{1}{2} \cdot 0 \cdot 1} \cdot 1!$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$, und setzen wir $\det(A_n) = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n} n!$ voraus. Durch Entwicklung zur $(n+1)$ -ten Spalte erhalten wir

$$\begin{aligned} \det A_{n+1} &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+i+1} a_{i,n+1} \det A_{i,n+1} = (-1)^{n+1+1} a_{1,n+1} \det A_{1,n+1} = \\ &(-1)^n (n+1) \det A_n = (-1)^n (n+1) (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n} n! = (-1)^{\frac{1}{2}(n-1)n+n} (n+1)! \\ &= (-1)^{\frac{1}{2}n(n+1)} (n+1)!. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

zu (a) Die Entwicklung von $A^{(j)}$ zur j -ten Spalte liefert

$$\det A^{(j)} = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} b_k \det(A_{kj})$$

für $1 \leq j \leq n$.

zu (b) Für $1 \leq i \leq n$ gilt jeweils

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j &= \det(A)^{-1} \sum_{j=1}^n a_{ij} \det(A^{(j)}) \\ &= \det(A)^{-1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n (-1)^{k+j} a_{ij} b_k \det A_{kj} = \det(A)^{-1} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ij} \tilde{a}_{jk} b_k \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Definition der adjunkten Matrix $\tilde{A}$ verwendet wurde.

zu (c) Laut Vorlesung gilt $A\tilde{A} = \det(A)E^{(n)}$. Der Eintrag $\sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{a}_{jk}$ von $A\tilde{A}$ an der Stelle (i, k) ist also gegeben durch $\det(A) \cdot \delta_{ik}$. Setzen wir dies in die Formel aus Teil (b) ein, so erhalten wir für den i -ten Eintrag des Vektors Ax den Wert

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &= \det(A)^{-1} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}\tilde{a}_{jk}b_k = \det(A)^{-1} \sum_{k=1}^n \det(A) \cdot \delta_{ik}b_k \\ &= \det(A)^{-1} \det(A)b_k = b_i \quad ,\end{aligned}$$

für $1 \leq i \leq n$.

zu (d) Es gilt

$$\begin{aligned}\det A &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix} = 66 \\ \det A^{(1)} &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} = -1 \\ \det A^{(2)} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 8 \\ \det A^{(3)} &= \det \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 13\end{aligned}$$

der gesuchte Lösungsvektor ist also gegeben durch $\frac{1}{66}(-1, 8, 13) = (-\frac{1}{66}, \frac{4}{33}, \frac{13}{66})$.