

Lineare Algebra

— Lösung Blatt 11 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a)

$$(3 \ 5) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 2 & 5 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

zu (b) Laut Vorlesung hat jede Transposition das Signum -1 , also gilt auch $\text{sgn}(\sigma) = -1$. Ist $\sigma \in S_n$ ein beliebig vorgegebenes Element, dann stellt man σ zunächst als Produkt von Transpositionen dar. Ist r die Anzahl der Faktoren in dieser Produktdarstellung, dann gilt $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^r$.

zu (c) Die Leibniz-Formel für die Determinante einer Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ lautet $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)}$. Da $\sigma = (2 \ 5)$ eine Transposition ist, gilt $\text{sgn}(\sigma) = -1$. Außerdem gilt $a_{1\sigma(1)} = a_{11} = 2$, $a_{2\sigma(2)} = a_{25} = 7$, $a_{3\sigma(3)} = a_{33} = 6$, $a_{4\sigma(4)} = a_{44} = 8$ und $a_{5\sigma(5)} = a_{52} = 7$. Insgesamt erhalten wir $s_\sigma = (-1) \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 7 = -4704$.

zu (d) Die ersten beiden Regeln sind im Allgemeinen falsch. Setzt man zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = E^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dann gilt $\det(A) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot 2 = -2$, $\det(B) = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$, aber

$$\det(A+B) = \det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 4 \neq \det(A) + \det(B)$$

und

$$\det(-A) = \det \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = (-1)(-4) - (-3)(-2) = -2 \neq -\det(A).$$

(Die Determinantenfunktion verhält sich additiv in jeder einzelnen Zeile, aber nicht additiv bezüglich der gesamten Matrix.)

Die dritte Regel ist richtig. Dies kann man sich zum Beispiel anhand der Leibniz-Formel

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)}$$

klarmachen: Ist die ℓ -te Zeile von A gleich Null, dann ist in jedem Produkt $\prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)}$ der Faktor $a_{\ell\sigma(\ell)} = 0$, also auch die gesamte Summe. Nehmen wir nun an, dass die ℓ -te Spalte von A gleich Null ist. Für jedes $\sigma \in S_n$ muss es auf Grund der Bijektivität ein $j \in \{1, \dots, n\}$ mit $\sigma(j) = \ell$ geben. Im Produkt $\prod_{k=1}^n a_{k\sigma(k)}$ ist dann der Faktor $a_{j\sigma(j)} = a_{j\ell}$ gleich Null.

Aufgabe 1

zu (a) Die Sarrus-Regel liefert

$$\begin{aligned}\det(B) &= \bar{1} \cdot \bar{0} \cdot \bar{1} + \bar{2} \cdot \bar{1} \cdot \bar{0} + \bar{0} \cdot \bar{2} \cdot \bar{1} - \bar{0} \cdot \bar{0} \cdot \bar{0} - \bar{1} \cdot \bar{1} \cdot \bar{1} - \bar{1} \cdot \bar{2} \cdot \bar{2} = \\ &\quad \bar{0} + \bar{0} + \bar{0} - \bar{0} - \bar{1} - \bar{1} = -\bar{2} = \bar{1}.\end{aligned}$$

zu (b) Hier ergibt sich die Determinante der Matrix aus der Rechnung

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} + \bar{0} = \bar{2} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} = \bar{6} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix} \\ &= \bar{24} \cdot \det \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} = \bar{24} = \bar{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

zu (a)

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & 7 & 6 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 3 & 4 & 2 & 5 & 9 & 7 & 6 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 5 & 9 & 7 & 6 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 7 & 6 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 9 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 11 & 10 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 11 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

zu (b) Die Elemente von A_4 sind genau die Elemente der S_4 mit positivem Signum. Es gibt in der A_4 genau halb so viele Elemente wie in der S_4 , also genau $\frac{1}{2} \cdot (4!) = \frac{1}{2} \cdot 24 = 12$. Eines davon ist die Identität, laut Vorlesung besitzt außerdem jedes Produkt aus zwei Transpositionen das Signum $(-1)^2 = 1$. Wir versuchen, durch Bildung solcher Produkte 12 verschiedene Elemente zusammenzubekommen. Um sicherzugehen, dass die Elemente wirklich verschieden voneinander sind, rechnen wir die Elemente jeweils

in Tabellenschreibweise aus.

$$\begin{aligned}
\text{id} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} & (1\ 2)(3\ 4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
(1\ 3)(2\ 4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} & (1\ 4)(2\ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\
(1\ 2)(2\ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} & (2\ 3)(1\ 2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \\
(1\ 2)(2\ 4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} & (2\ 4)(1\ 2) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \\
(1\ 3)(3\ 4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} & (3\ 4)(1\ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \\
(2\ 3)(3\ 4) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} & (3\ 4)(2\ 3) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

zu (a) Für jedes $\sigma \in S_4$ mit $\sigma(1) \in \{1, 2\}$ gilt $s_\sigma = 0$, denn in diesem Fall enthält s_σ einen Faktor der Form $a_{1,j}$ mit $j \in \{1, 2\}$, und diese Einträge in der Matrix sind gleich Null. Aus demselben Grund ist $s_\sigma = 0$ in den Fällen $\sigma(2) \in \{1, 2\}$, $\sigma(3) \in \{3, 4\}$ und $\sigma(4) \in \{3, 4\}$. Für ein $\sigma \in S_4$ ist also nur dann $s_\sigma \neq 0$, wenn $\sigma(1), \sigma(2) \in \{3, 4\}$ und $\sigma(3), \sigma(4) \in \{1, 2\}$ gilt. Dabei ist σ durch die Wahl von $\sigma(1)$ und $\sigma(3)$ bereits festgelegt. Denn auf Grund der Bijektivität von σ muss $\sigma(1) \neq \sigma(2)$ und $\sigma(3) \neq \sigma(4)$ gelten, und damit bleibt für $\sigma(2)$ und $\sigma(4)$ nur noch jeweils eine Möglichkeit. Für die Wahl der Bilder $\sigma(1)$ und $\sigma(3)$ gibt es jeweils zwei Möglichkeiten (nämlich 3, 4 bzw. 1, 2), somit existieren höchstens $2 \cdot 2 = 4$ Elemente σ mit $s_\sigma \neq 0$.

zu (b) Das eindeutig bestimmte Element $\sigma_1 \in S_4$ mit $\sigma_1(1) = 3$ und $\sigma_1(3) = 2$ ist gegeben durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 3) \cdot (2\ 4).$$

Die drei anderen Möglichkeiten $(\sigma(1), \sigma(3)) = (4, 3), (3, 4), (4, 3)$ liefern entsprechend die drei Elemente

$$\begin{aligned}
\sigma_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1\ 4) \circ (2\ 3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (1\ 4) \circ (2\ 3) \circ (3\ 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = (1\ 3) \circ (2\ 4) \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\
&= (1\ 3) \circ (2\ 4) \circ (3\ 4)
\end{aligned}$$

$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 4) \circ (2\ 3).$$

Auf Grund der Anzahl der Transpositionen ist das Signum der vier Elemente gegeben durch $\text{sgn}(\sigma_1) = (-1)^2 = 1$, $\text{sgn}(\sigma_2) = (-1)^3 = -1$, $\text{sgn}(\sigma_3) = (-1)^3 = -1$ und $\text{sgn}(\sigma_4) = (-1)^2 = 1$. Die zu den vier Elementen gehörenden Summanden sind also gegeben durch

$$\begin{aligned}s_{\sigma_1} &= 1 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 8 = 160 \\s_{\sigma_2} &= (-1) \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 8 = -240 \\s_{\sigma_3} &= (-1) \cdot 1 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 = -168 \\s_{\sigma_4} &= 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 = 252.\end{aligned}$$

Für die Determinante erhalten wir den Wert $\det(A) = 160 + (-240) + (-168) + 252 = 4$.