Samstag, 5. Juni 2021

Lineare Algebra

— Blatt 8 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Sei K ein Körper. Wie ist die Dimension eines beliebigen K-Vektorraums definiert? Warum gilt $\dim K^n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$?

(b) Welche Dimension hat $\mathbb{C}^2$, aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum?

(c) Gibt es Matrizen $A_1, ..., A_5 \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$, die im $\mathbb{R}$-Vektorraum der 2×2-Matrizen eine 5-elementige linear unabhängige Teilmenge bzw. ein 5-elementiges Erzeugendensystem bzw. eine 5-elementige Basis bilden?

(d) Seien E, E' zweidimensionale Untervektorräume des $\mathbb{R}^n$. Ist im Fall $n = 3$ die Dimension $\dim(E \cap E') = 0$ möglich? Wie sieht es im Fall $n = 4$ aus?

(e) Verifizieren Sie die Gültigkeit des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen, indem Sie die Kern und Bild der linearen Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1, 0)$ angeben und deren Dimensionen bestimmen.

Aufgabe 1

(a) Sei $U = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid 5x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 0\}$. Geben Sie eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $\ker(\phi) = U$ an, und bestimmen Sie die Dimension von U mit Hilfe des Dimensionssatzes für lineare Abbildungen.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von U als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) Bestimmen Sie eine Basis B' von U, die $\{(1, 2, 3, 3)\}$ als Teilmenge enthält.

Aufgabe 2

Sei $V = \mathbb{R}^7$, und seien W, W' zwei 5-dimensionale Untervektorräume von V.

(a) Beweisen Sie die Abschätzungen $3 \leq \dim(W \cap W') \leq 5$.

(b) Geben Sie für $d \in \{3, 4, 5\}$ jeweils Erzeugendensysteme von Untervektorräumen W, W' an, so dass $\dim(W \cap W') = d$ erfüllt ist (mit Nachweis).

Aufgabe 3

Sei K ein Körper und V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, wobei $n \in \mathbb{N}$ ist. Zeigen Sie, dass $V \times V$ mit der Vektoraddition definiert durch $(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2)$ und der skalaren Multiplikation $\lambda(v_1, v_2) = (\lambda v_1, \lambda v_2)$ für $(v_1, v_2), (w_1, w_2) \in V \times V$ und $\lambda \in K$ ein $2n$-dimensionaler K-Vektorraum ist.

Dieses Blatt wird vom 7. bis zum 11. Juni im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— **Blatt 8** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(4+3+3 Punkte)*

Wir betrachten im $\mathbb{R}^4$ die beiden Untervektorräume

$$U = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$$

und

$$V = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0\}.$$

(a) Geben Sie eine lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft $\ker(\phi) = U \cap V$ an (mit Nachweis), und bestimmen Sie $\dim(U \cap V)$ mit dem Dimensionssatz für lineare Abbildungen.

(b) Bestimmen Sie eine Basis B von $U \cap V$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum.

(c) Bestimmen Sie eine Basis B' des $\mathbb{R}^4$, die B als Teilmenge enthält.

Aufgabe 2 *(10 Punkte)*

Sei $V = \mathbb{R}^{10}$, und seien W, W', W'' drei Untervektorräume der Dimension 8 von V. Untersuchen Sie wie in der Tutoriumsaufgabe, welche Dimensionen für $W \cap W' \cap W''$ möglich sind, und begründen Sie Ihre Ergebnisse.

Aufgabe 3 *(3+3+4 Punkte)*

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ gerade. Zeigen Sie, dass dann eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ mit $A^2 = -E^{(n)}$ existiert.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $n = 2$ und bestimmen Sie die Darstellungsmatrix der 90°-Drehung (gegen den Uhrzeigersinn).

(b) Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$ mit $A^2 = -E^{(n)}$. Zeigen Sie, dass der $\mathbb{R}^n$ mit der gewöhnlichen Vektoraddition und der skalaren Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(a + ib, v) \mapsto av + bAv$ ein $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

(c) Bestimmen Sie die Dimension von $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum, und schließen Sie aus dem Ergebnis, dass n gerade sein muss.
Vorgehensweise: Sei r die Dimension und $\{v_1, ..., v_r\}$ eine Basis von $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum. Weisen Sie nach, dass $\{v_1, Av_1, ..., v_r, Av_r\}$ eine $2r$-elementige Basis von $\mathbb{R}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Abgabe: Dienstag, 15. Juni 2021, 12:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.