Lineare Algebra

— Blatt 7 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Welche Bedingungen müssen nach Definition erfüllt sein, damit eine Teilmenge $B \subseteq V$ eine Basis ist?

(b) Nehmen wir nun an, dass B eine Basis von V ist, und seien A, C weitere Teilmengen von V mit $A \subsetneq B \subsetneq C$. Ist es möglich, dass auch A bzw. C Basen von V sind?

(c) Kann es passieren, dass ein Vektorraum V sich selbst als Basis besitzt? Gibt es Vektorräume mit der leeren Menge $\varnothing$ als Basis?

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $\{1+i, 2-i\}$ eine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum, aber keine Basis von $\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum ist.

(b) Sei nun K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie: Ist $\{v, w\}$ eine zweielementige Basis von V, dann ist $\{v+w, v+2w\}$ ebenfalls eine Basis von V.

Aufgabe 2

Gegeben Sie für die folgenden K-Vektorräume V eine Basis an, und weisen Sie die Basiseigenschaft jeweils nach.

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$

(b) $K = \mathbb{R}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}} \;\middle|\; a, b, c, d \in \mathbb{R} \text{ mit } a+b+c+d = 0 \right\}$

(c) $K = \mathbb{R}$, $V = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ w & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{C}} \;\middle|\; u, v, w \in \mathbb{C} \text{ mit } u+v+w = 0 \right\}$

Aufgabe 3

Sei $V = \mathbb{F}_2^2$. Bestimmen Sie die Menge

(a) aller Teilmengen von V,

(b) aller linear unabhängigen Teilmengen von V,

(c) der Erzeugendensysteme von V,

(d) der Basen von V,

(e) der geordneten Basen von V.

Ein Nachweis ist dabei *nicht* erforderlich.

Dieses Blatt wird vom 31. Mai bis zum 4. Juni im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— Blatt 7 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(4+6 Punkte)*

Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

(a) Genau dann besitzt V nur einelementige Basen, wenn ein $v \in V$ mit $V = \text{lin}(v)$ und $v \neq 0_V$ existiert. (Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass jeder K-Vektorraum mindestens eine Basis besitzt.)

(b) Setzen wir nun voraus, dass $B = \{v, w\}$ eine zweielementige Basis von V ist. Zeigen Sie, dass für jeden Vektor $w' \in V$ die Menge $B' = \{v, w'\}$ genau dann eine Basis von V ist, wenn $\lambda, \mu \in K$ mit $w' = \lambda v + \mu w$ und $\mu \neq 0$ existieren.

Aufgabe 2 *(4+3+3 Punkte)*

Seien K ein Körper, V, W zwei K-Vektorräume und $\phi : V \to W$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Ist ϕ bijektiv und B eine Basis von V, dann ist $\phi(B)$ eine Basis von W.

(b) Weisen Sie anhand konkreter Gegebenbeispiele nach, dass die Aussage (a) im Allgemeinen falsch ist, wenn man das Wort "bijektiv" durch "injektiv" oder "surjektiv" ersetzt.

(c) Zeigen Sie ebenso anhand eines konkreten Gegebenbeispiels, dass (a) falsch wird, wenn man die Voraussetzung fallen lässt, dass ϕ eine lineare Abbildung ist.

Aufgabe 3 *(2+2+2+2+2 Punkte)*

Sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $V = \mathbb{F}_p^n$. Bestimmen Sie jeweils eine Formel für die Anzahl

(a) der linear unabhängigen Tupel in V mit zwei bzw. drei Elementen,

(b) der linear unabhängigen Tupel in V insgesamt,

(c) der linear unabhängigen Teilmengen von V,

(d) der geordneten Basen von V,

(e) der Basen von V.

Dabei darf ohne Beweis verwendet werden: Ist M eine m-elementige Menge, dann gibt es genau $m!$ verschiedene Tupel $(a_1, ..., a_m)$ mit $\{a_1, ..., a_m\} = M$.

Abgabe: Dienstag, 8. Juni 2021, 12:15 Uhr
Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.