Dienstag, 25. Mai 2021

Lineare Algebra

— Blatt 6 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Seien e_1, e_2 die beiden Einheitsvektoren im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$. Geben Sie die Untervektorräume $\text{lin}(\{e_1\})$, $\text{lin}(\{e_2\})$, $\text{lin}(\{e_1 + e_2\})$ und $\text{lin}(\{e_1, e_2\})$ an.

(b) Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\{e_1, e_1 - e_2, e_2\}$ im $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^2$ linear abhängig ist.

(c) Ändern sich die Untervektorräume in Teil (a), wenn man $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum betrachtet?

(d) Gibt es ein linear abhängiges Tupel (v_1, v_2, v_3) von Vektoren im $\mathbb{C}$-Vektorraum $\mathbb{C}^2$ mit der Eigenschaft, dass $\{v_1, v_2, v_3\}$ linear unabhängig ist? Ist die umgekehrte Situation möglich?

(e) Geben Sie eine linear unabhängige und eine linear abhängige Teilmenge des Polynomrings $\mathbb{R}[x]$, aufgefasst als $\mathbb{R}$-Vektorraum, an. Wie sehen die Elemente des Untervektorraums $\text{lin}(\{5, x\})$ aus?

Aufgabe 1

Überprüfen Sie, ob die folgenden Teilmengen $S \subseteq V$ des angegebenen K-Vektorraums V linear unabhängig sind. Falls ja, weisen Sie dies nach, ansonsten stellen Sie einen (von Ihnen gewählten) Vektor $v \in S$ als Linearkombination von $S \setminus \{v\}$ dar.

(a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{C}^2$, $S = \{(1, i), (i, 1), (2, 0)\}$

(b) $K = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^2$, $S = \{(1, i), (i, 1), (2, 0)\}$

(c) $K = \mathbb{R}$, $V = \text{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $S = \{f, g, h\}$ mit $f(x) = 2x$, $g(x) = x - 3$, $h = x^2$

Aufgabe 2

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: Ist $r \in \mathbb{N}_0$ und $(v_1, ..., v_r)$ ein linear abhängiges Tupel von Vektoren $v_i \in V$, dann ist auch das Tupel $(\phi(v_1), ..., \phi(v_r))$ linear abhängig.

(b) Zeigen Sie anhand konkreter Beispiele, dass für eine linear abhängige Teilmenge $S \subseteq V$ die Bildmenge $\phi(S)$ sowohl linear abhängig als auch linear unabhängig sein kann.

(c) Weisen Sie an Hand eines konkreten Beispiels nach, dass $\phi(S)$ auch dann linear abhängig sein kann, wenn S linear unabhängig ist.

Aufgabe 3

Sei V ein K-Vektorraum, und seien S und T Teilmengen von V. Beweisen Sie die folgenden Aussagen, oder widerlegen Sie sie durch ein konkretes Gegenbeispiel.

(a) $\text{lin}(S) \subseteq \text{lin}(T) \Rightarrow S \subseteq T$

(b) $S \subsetneq T \Rightarrow \text{lin}(S) \subsetneq \text{lin}(T)$

Dieses Blatt wird vom 26. bis zum 28. Mai im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— **Blatt 6** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(3+3+4 Punkte)*

Gegeben sei die Menge $S = \{v_1, ..., v_6\}$ bestehend aus den Vektoren

$$v_1 = (1,2,1,2) \quad , \quad v_2 = (1,1,1,1) \quad , \quad v_3 = (0,1,1,0) \quad ,$$
$$v_4 = (0,1,0,1) \quad , \quad v_5 = (1,0,0,1) \quad , \quad v_6 = (1,2,2,1)$$

(a) Stellen Sie den Vektor v_5 als Linearkombination von $S \setminus \{v_5\}$ und den Vektor v_6 als Linearkombination von $S \setminus \{v_6\}$ dar.

(b) Weisen Sie nach, dass $\text{lin}\,\{v_2, v_5, v_6\} = \text{lin}\,\{v_3, v_5, v_6\}$ gilt.

(c) Finden Sie eine linear unabhängige Teilmenge $B \subseteq S$ mit $\text{lin}(B) = \text{lin}(S)$ und weisen Sie diese beiden Eigenschaften von B nach.

Aufgabe 2 *(3+7 Punkte)*

Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum, und seien S, T linear unabhängige Teilmengen von V.

(a) Zeigen Sie anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass die Gleichung $\text{lin}(S) \cap \text{lin}(T) = \text{lin}(S \cap T)$ im Allgemeinen falsch ist.

(b) Beweisen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen.

  (i) Die Menge $S \cup T$ ist linear unabhängig, und es gilt $S \cap T = \varnothing$.

  (ii) Es gilt $\text{lin}(S \cup T) = \text{lin}(S) \oplus \text{lin}(T)$.

Aufgabe 3 *(5+5 Punkte)*

Sei K ein Körper und $\phi : V \to W$ ein Homomorphismus von K-Vektorräumen. Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung ϕ ist genau dann injektiv, wenn für jedes $n \in \mathbb{N}$ und jede n-elementige linear unabhängige Teilmenge $S = \{v_1, ..., v_n\}$ von V die Bildmenge $\phi(S)$ eine n-elementige linear unabhängige Teilmenge von W ist.

(b) Die Abildung ϕ ist genau dann surjektiv, wenn für jedes Erzeugendensystem S von V die Bildmenge $\phi(S)$ ein Erzeugendensystem von W ist.

Abgabe: Dienstag, 1. Juni 2021, 12:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.