Lineare Algebra

— Blatt 4 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Geben Sie eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die unter Multiplikation *nicht* abgeschlossen ist.

(b) Wenn eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ unter der Multiplikation abgeschlossen ist, ist dann U zusammen mit der Multiplikation immer eine Gruppe, oder zumindest ein Monoid?

(c) Geben Sie ein Beispiel für ein Monoid an, das keine Gruppe ist.

(d) Aus welchem allgemeinen Satz hatte sich ergeben, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge der invertierbaren $n \times n$-Matrizen über einem Körper K eine Gruppe ist?

(e) Wenn man diesen Satz auf das Monoid $(\mathbb{N}_0, +)$ anwendet, was für eine Gruppe erhält man dann?

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ sowohl die erweiterte Koeffizientenmatrix als auch die Lösungsmenge $\mathcal{L}_a \subseteq \mathbb{R}^3$ des folgenden LGS.

$$\begin{array}{rcrcrcr}
(a-1)x_1 & & & + & (a+1)x_3 & = & 5a-8 \\
2(a-1)x_1 & + & x_2 & + & 2(a+1)x_3 & = & 10a-9 \\
(a-1)x_1 & - & 2x_2 & & & = & 2a-16
\end{array}$$

Aufgabe 2

Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq X$ unter der jeweils angegebenen Verküpfung $*$ abgeschlossen sind, und ob U mit der entsprechend eingeschränkten Verknüpfung eine Gruppe ist.

(a) $X = \mathbb{C}$, $U = \{1, -1, i, -i\}$, $*$ ist die Multiplikation auf $\mathbb{C}$

(b) $X = \mathcal{M}_{2,\mathbb{Q}}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \right\}$, $*$ ist die Multiplikation von Matrizen

(c) $X = \mathcal{M}_{2,\mathbb{Q}}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbb{Q} \right\}$, $*$ ist die Multiplikation von Matrizen

Aufgabe 3

(a) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$, $B \in \mathcal{M}_{m,\mathbb{R}}$ und $C \in \mathcal{M}_{n,\mathbb{R}}$. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass die Blockmatrix $A \in \mathcal{M}_{m+n,\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} B & \mathbf{0}^{(\mathbf{m}\times\mathbf{n})} \\ \mathbf{0}^{(\mathbf{n}\times\mathbf{m})} & C \end{pmatrix} \qquad \text{invertierbar ist.}$$

Wie sieht in diesem Fall die inverse Matrix aus?

(b) Berechnen Sie die Inverse der Matrix

$$\begin{pmatrix} -12 & -6 & 37 \\ 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Dieses Blatt wird vom 10. bis zum 14. Mai im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— **Blatt 4** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(5+5 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix und die Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{F}_3^4$ des folgenden LGS.

$$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & & & - & x_3 & + & x_4 & = & \bar{1} \\ & - & x_2 & + & x_3 & & & = & \bar{1} \\ x_1 & + & x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & \bar{0} \\ -x_1 & & & - & x_3 & - & x_4 & = & \bar{2} \end{array}$$

(b) Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{F}_3$ die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS, und geben Sie jeweils alle Elemente der Lösungsmenge $\mathcal{L}_a \subseteq \mathbb{F}_3^4$ an.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & x_3 & + & ax_4 & = & a - \bar{1} \\ -(a+\bar{1})x_1 & + & ax_2 & & & + & ax_4 & = & \bar{2}a + \bar{1} \\ & & 2\bar{a}x_2 & + & \bar{2}x_3 & - & \bar{a}x_4 & = & \bar{1} \\ -(a+\bar{1})x_1 & + & ax_2 & + & \bar{2}x_3 & + & ax_4 & = & \bar{2}a + \bar{2} \end{array}$$

Aufgabe 2 *(3+3+4 Punkte)*

Untersuchen Sie, welche der folgenden Teilmengen $U \subseteq X$ unter der jeweils angegebenen Verküpfung $*$ abgeschlossen sind, und ob U mit der entsprechend eingeschränkten Verknüpfung eine Gruppe ist.

(a) $X = \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \mu \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$, $*$ ist die Multiplikation von Matrizen

(b) $X = \mathcal{M}_{2,\mathbb{R}}$, $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$, $*$ ist die Multiplikation von Matrizen

(c) $X = \mathbb{R}$, $U = \{r + s\sqrt{2} \mid r, s \in \mathbb{Q}\ ,\ (r,s) \neq (0,0)\}$, $*$ ist die Multiplikation auf $\mathbb{R}$

Aufgabe 3 *(4+6 Punkte)*

(a) Sei K ein Körper. Zeigen Sie, dass eine Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,K}$$

genau dann invertierbar ist, wenn $ad - bc \neq 0_K$ gilt, und berechnen Sie A^{-1} in diesem Fall.
Hinweis: Unterscheiden Sie die beiden Fälle $a \neq 0_K$ und $a = 0_K$.

(b) Bestimmen Sie Matrizen $T \in \mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ und $U \in \mathcal{M}_{4,\mathbb{R}}$, so dass für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 17 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & 4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{die Gleichung} \quad TAU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{erfüllt ist.}$$

Abgabe: Dienstag, 18. Mai 2021, 12:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.