Samstag, 1. Mai 2021

Lineare Algebra

— Blatt 3 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Sei K ein Körper, $A \in \mathcal{M}_{3\times 5,K}$ und $B \in \mathcal{M}_{5\times 4,K}$. Kann das Matrixprodukt AB oder BA gebildet werden? Falls ja, welches Format hat die Produktmatrix?

(b) Welche der bekannten Rechengesetze (Assoziativ-, Kommutativ- und Distributivgesetz) gelten *nicht* für Matrizen?

(c) Nach Definition sind Einheitsmatrizen $E^{(n)}$ immer quadratisch, und laut Vorlesung haben sie die Eigenschaft $E^{(n)}A = A$ für alle Matrizen A mit n Zeilen. Kann es auch nicht-quadratische Matrizen mit dieser Eigenschaft geben? Konkret gefragt: Existiert eine Matrix $E \in \mathcal{M}_{3\times 4,K}$, so dass $EA = A$ für jede Matrix mit vier Zeilen erfüllt ist?

(d) Unter welchen Bedingungen liegt eine Basimatrix $B_{ij}^{(m\times n)}$ in normierter Zeilenstufenform vor? Wie lauten in diesem Fall deren Kennzahlen?

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie alle möglichen Produkte der folgenden Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 1 & 7 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad C = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -5 \\ 8 \end{pmatrix} \quad , \quad D = \begin{pmatrix} 13 & 0 & 27 & 55 & 2 \\ 1 & 89 & -6 & 0 & 3 \\ -48 & 10 & 7 & 19 & -4 \end{pmatrix} \quad , \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 3 \end{pmatrix}$$

(b) Bestimmen Sie ein Tupel $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, so dass die folgende Gleichung erfüllt ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}$. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ heißt *symmetrisch*, wenn ${}^{\mathrm{t}}A = A$ gilt.

(a) Geben Sie eine unendliche Menge symmetrischer Matrizen aus $\mathcal{M}_{3,\mathbb{R}}$ an.

(b) Ist das Produkt zweier symmetrischer quadratischer Matrizen immer symmetrisch?

(c) Zeigen Sie, dass für jedes $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ die Matrix ${}^{\mathrm{t}}A + A$ symmetrisch ist.

Aufgabe 3

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_{11}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\bar{8}x_1 & + & \bar{5}x_2 & + & \bar{6}x_3 & + & \bar{3}x_4 & = & \bar{4} \\
\bar{9}x_1 & + & \bar{7}x_2 & + & \overline{10}x_3 & + & \bar{9}x_4 & = & \bar{1} \\
\bar{8}x_1 & + & \bar{5}x_2 & + & \bar{7}x_3 & + & \bar{6}x_4 & = & \bar{8} \\
\bar{9}x_1 & + & \bar{7}x_2 & + & \overline{10}x_3 & + & \bar{9}x_4 & = & \bar{1}
\end{array}$$

(a) Geben Sie die erweiterte Koeffizientenmatrix des LGS an.

(b) Überführen Sie diese Matrix mit Hilfe des Gauß-Algorithmus in normierte ZSF.

(c) Bestimmen Sie einen Lösungsvektor für das LGS.

(d) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathscr{L}^{\text{hom}} \subseteq \mathbb{F}_{11}^4$ des zugeordneten homogenen LGS.

(e) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathscr{L} \subseteq \mathbb{F}_{11}^4$ des angegebenen inhomogenen LGS.

Dieses Blatt wird vom 3. bis zum 7. Mai im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— **Blatt 3** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(2+2+2+2+2 Punkte)*

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über Matrizen wahr oder falsch sind, d.h. geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an. Im folgenden seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ und K ein Körper.

(a) Es gilt ${}^{\mathrm{t}}(AB) = {}^{\mathrm{t}}A^{\mathrm{t}}B$ für alle $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$.

(b) Aus $AB = \mathbf{0^{(n)}}$ folgt $A = \mathbf{0^{(n)}}$ oder $B = \mathbf{0^{(n)}}$, für alle $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$.

(c) Aus $A^2 = A$ folgt $A = E^{(n)}$, für alle $A \in \mathcal{M}_{n,K}$.

(d) Aus $A^2 = A$ folgt $A = E^{(n)}$, für alle *invertierbaren* $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ (vgl. Aufg. 2 (a)).

(e) Es gilt $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ für alle $A, B \in \mathcal{M}_{n,K}$.

Aufgabe 2 *(4+6 Punkte)*

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{n,K}$ wird *nilpotent* genannt, wenn $A^m = 0$ für ein $m \in \mathbb{N}$ gilt, und *invertierbar*, wenn eine Matrix B mit mit $AB = E^{(n)}$ existiert. Man bezeichnet B dann als *Inverse* von A. Zeigen Sie: Ist $N \in \mathcal{M}_{n,K}$ nilpotent, dann ist N nicht invertierbar, aber $E^{(n)} + N$ ist invertierbar.

(b) Bestimmen Sie eine Inverse der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Bestimmen Sie die Menge aller $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ mit der Eigenschaft, dass das Produkt AB symmetrisch ist, wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 *(6+4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathscr{L} \subseteq \mathbb{F}_5^5$ des folgenden LGS über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr} x_1 & + & \bar{2}x_2 & + & \bar{2}x_3 & + & x_4 & + & \bar{4}x_5 & = & \bar{4} \\ \bar{3}x_1 & + & \bar{4}x_2 & + & \bar{2}x_3 & + & x_4 & & & = & \bar{4} \end{array}$$

(b) Die vierelementige Menge $\mathbb{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \beta\}$ bildet zusammen mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, gegeben durch folgende Tabellen, einen Körper. (Das braucht nicht gezeigt werden.)

$+$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	α	β
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	α	β
$\bar{1}$	$\bar{1}$	$\bar{0}$	β	α
α	α	β	$\bar{0}$	$\bar{1}$
β	β	α	$\bar{1}$	$\bar{0}$

$\cdot$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	α	β
$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$	$\bar{0}$
$\bar{1}$	$\bar{0}$	$\bar{1}$	α	β
α	$\bar{0}$	α	β	$\bar{1}$
β	$\bar{0}$	β	$\bar{1}$	α

Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathscr{L} \subseteq \mathbb{F}_4^4$ des folgenden LGS über dem Körper $\mathbb{F}_4$.

$$\begin{array}{rcrcl} \alpha x_1 & + & x_2 & = & \bar{1} \\ x_1 & + & \alpha x_2 & = & \beta \end{array}$$

Abgabe: Dienstag, 11. Mai 2021, 12:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.