Lineare Algebra

— Blatt 2 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 (Vorbereitung auf das Tutorium)

- (a) Wie ist das Element $\overline{35}$ im Körper $\mathbb{F}_{23}$ definiert?
- (b) Welchen Kehrwert hat das Element $\bar{5}$ in $\mathbb{F}_{17}$?
- (c) Warum ist $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ kein Körper?
- (d) Kann jede Teilmenge $\mathcal{L}^h \subseteq K^n$ als Lösungsmenge eines *homogenen* linearen Gleichungssystems in n Unbekannten über einem Körper K auftreten? Nach welchem Schema geht man vor, um zu einem gegebenen homogenen LGS mit einer Koeffizientenmatrix in normierter Zeilenstufenform die Lösungsmenge hinzuschreiben?

Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}^h \subseteq \mathbb{R}^5$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0_{\mathbb{R}^4}$ mit der folgenden Koeffizientenmatrix in normierter Zeilenstufenform.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- (b) Geben Sie eine Matrix $A \in \mathcal{M}_{3 \times 4, \mathbb{R}}$ in normierter Zeilenstufenform an, so dass das homogene lineare Gleichungssystem die Teilmenge $\mathcal{L}^h \subseteq \mathbb{R}^4$ gegeben durch

$$\mathcal{L}^h = \left\{ \lambda_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \right\} \text{ als Lösungsmenge besitzt.}$$

Aufgabe 2

Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_7$.

$$\begin{aligned} \bar{6}x_1 + x_2 + \bar{6}x_3 &= \bar{1} \\ \bar{5}x_1 + \bar{6}x_2 + \bar{6}x_3 &= \bar{1} \\ \bar{2}x_1 + \bar{2}x_2 + \bar{3}x_3 &= \bar{4} \end{aligned}$$

Geben Sie alle Elemente der Lösungsmenge $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{F}_7^3$ dieses LGS an.

Aufgabe 3

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Weisen Sie nach, dass $\bar{0} = 0 + n\mathbb{Z}$ in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ die Eigenschaft eines Nullelements besitzt, und dass in $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \cdot)$ das Distributivgesetz gilt.

(b) Wir betrachten die Menge $R = \mathbb{F}_3 \times \mathbb{F}_3$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ gegeben durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{F}_3$. Zeigen Sie, dass die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ in R jeweils das Assoziativgesetz erfüllen.

Dieses Blatt wird vom 26. bis zum 30. April im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— Blatt 2 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

- (a) Bestimmen Sie die Lösungsmenge $\mathcal{L}^h \subseteq \mathbb{R}^7$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0_{\mathbb{R}^4}$ mit der folgenden Koeffizientenmatrix A in normierter Zeilenstufenform.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

- (b) Geben Sie eine Matrix $0 \neq A \in \mathcal{M}_{3 \times 4, \mathbb{R}}$ in normierter Zeilenstufenform an, so dass das homogene lineare Gleichungssystem mit Koeffizientenmatrix A in seiner Lösungsmenge die folgenden Vektoren enthält.

$$u = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Für jedes $a \in \mathbb{F}_5$ betrachten wir das folgende lineare Gleichungssystem über dem Körper $\mathbb{F}_5$.

$$\begin{aligned} \bar{2}x_1 + \bar{4}x_2 + (\bar{3}a + \bar{1})\bar{x}_3 &= \bar{4} \\ \bar{4}x_1 + (\bar{2}a + \bar{1})x_2 + (\bar{3}a + \bar{2})x_3 &= \bar{2} \\ x_1 + (\bar{4}a + \bar{3})x_2 + (\bar{4}a + \bar{3})x_3 &= \bar{2} \end{aligned}$$

Geben Sie für jedes $a \in \mathbb{F}_5$ alle Elemente der Lösungsmenge $\mathcal{L}_a \subseteq \mathbb{F}_5^3$ dieses LGS an.

Aufgabe 3 (2+4+2+2 Punkte)

Sei R die Menge aus Tutoriumsaufgabe 3 (b), und seien $+$ und $\cdot$ die dort definierten Verknüpfungen. Wir setzen als bekannt voraus, dass $(R, +, \cdot)$ ein Ring ist, mit $0_R = (\bar{0}, \bar{0})$ als Nullelement.

- (a) Bestimmen Sie das Einselement von R (mit Nachweis).
- (b) Zeigen Sie, dass jedes Element aus $R \setminus \{0_R\}$ als Potenz des Elements $(\bar{2}, \bar{1})$ dargestellt werden kann. Dies soll bedeuten, dass für jedes Element $(a, b) \in R \setminus \{0_R\}$ (mit $a, b \in \mathbb{F}_3$) jeweils ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $(a, b) = (\bar{2}, \bar{1})^n = (\bar{2}, \bar{1}) \cdot \dots \cdot (\bar{2}, \bar{1})$ gilt (mit n Faktoren).
- (c) Zeigen Sie, dass $(R, +, \cdot)$ ein Körper ist.
- (d) Sei nun $(S, +, \cdot)$ die Menge $S = \mathbb{F}_5 \times \mathbb{F}_5$ mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ gegeben durch

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{und} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$$

für alle $a, b, c, d \in \mathbb{F}_5$. Zeigen Sie, dass $(S, +, \cdot)$ kein Körper ist.

Abgabe: Dienstag, 4. Mai 2021, 12:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.