Lineare Algebra

— Blatt 11 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

- (a) Geben Sie die Transposition $(3\ 5) \in S_7$ in Tabellenschreibweise an.
- (b) Welches Signum hat das Element $(3\ 5)$ in S_7 ? Wie lässt sich das Signum einer Permutation allgemein berechnen?
- (c) Wie lautet die Leibniz-Formel für die Determinante? Welchen Wert hat der Summand $s_\sigma = \text{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^5 a_{k\sigma(k)}$ für die Matrix $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{5,\mathbb{Q}}$ gegeben durch $a_{ij} = i + j$ und $\sigma = (2\ 5)$?
- (d) Sind die folgenden Rechenregeln für Determinanten allgemein gültig?
 - (i) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$
 - (ii) $\det(-A) = -\det(A)$
 - (iii) $\det(A) = 0$, falls A eine Nullzeile oder -spalte enthält

Aufgabe 1

- (a) Bestimmen Sie die Determinante der folgenden Matrix durch Anwendung der Sarrus-Regel.

$$B = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{2} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,\mathbb{F}_3}$$

- (b) Wir betrachten die folgende Matrix $A \in \mathcal{M}_{4,\mathbb{F}_7}$ über dem Körper $\mathbb{F}_7$ mit sieben Elementen.

$$A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{2} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{3} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{4} \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie $\det(A)$, indem Sie die Multilinearität der Determinantenfunktion und das Ergebnis von Aufgabe 0 (d) verwenden.

Aufgabe 2

- (a) Stellen Sie das folgende Element der symmetrischen Gruppe S_{11} als Produkt von Transpositionen dar, und bestimmen Sie das Signum.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 3 & 4 & 2 & 1 & 9 & 7 & 6 & 8 & 11 & 10 \end{pmatrix}$$

- (b) Geben Sie sämtliche Elemente der alternierenden Gruppe A_4 an, dargestellt als Produkte von Transpositionen.

Aufgabe 3

Wir betrachten die Matrix $A \in \mathcal{M}_{4,\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (a) Für jedes $\sigma \in S_4$ sei $s_\sigma = \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1,\sigma(1)}a_{2,\sigma(2)}a_{3,\sigma(3)}a_{4,\sigma(4)}$ der zugehörige Summand in der Leibniz-Formel für die Determinante der Matrix A . Zeigen Sie, dass es höchstens vier Elemente $\sigma \in S_4$ mit $s_\sigma \neq 0$ gibt.
- (b) Geben Sie die Elemente als Produkte von Transpositionen an, und berechnen Sie $\det(A)$ mit Hilfe der Leibniz-Formel.

Dieses Blatt wird vom 28. Juni bis zum 2. Juli im Tutorium bearbeitet.

Lineare Algebra

— Blatt 11 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

Berechnen Sie die Determinanten der folgenden beiden Matrizen.

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{1} \\ \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} & \bar{1} & \bar{0} & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{6, \mathbb{F}_2} \quad , \quad (b) \quad B = \begin{pmatrix} \bar{1} & \alpha & \bar{0} \\ \bar{0} & \bar{1} & \alpha \\ \alpha & \alpha & \bar{1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3, \mathbb{F}_4}$$

Dabei ist $\mathbb{F}_4 = \{\bar{0}, \bar{1}, \alpha, \alpha + \bar{1}\}$ ein Körper mit vier Elementen, und es gilt $\alpha(\alpha + \bar{1}) = \bar{1}$.

Aufgabe 2 (2+5+3 Punkte)

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{n, \mathbb{R}}$ die Matrix mit den Einträgen $a_{ij} = \delta_{n+1-i, j}$ für $1 \leq i, j \leq n$.

- Geben Sie die Matrix M_5 explizit an.
- Für jedes $\sigma \in S_n$ sei $s_\sigma = \text{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^n a_{k, \sigma(k)}$ der zugehörige Summand in der Leibniz-Formel für die Determinante der Matrix M_n . Zeigen Sie, dass s_σ nur für ein einziges Element $\sigma \in S_n$ ungleich Null ist, und geben Sie dieses Element an.
- Bestimmen Sie $\det(M_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe der Leibniz-Formel.

Aufgabe 3 (5+5 Punkte)

Seien K ein Körper, V ein endlich-dimensionaler K -Vektorraum und $\phi : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung.

- Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei geordnete Basen von V . Zeigen Sie, dass für die Darstellungsmatrizen die Gleichung $\det \mathcal{M}_{\mathcal{A}}^{\mathcal{A}}(\phi) = \det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(\phi)$ gilt.
Hinweis: Verwenden Sie den Satz vom Basiswechsel.
- Zeigen Sie: Die Abbildung ϕ ist genau dann bijektiv, wenn es geordnete Basen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ von V mit $\det \mathcal{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\phi) = 1$ gibt.

Abgabe: Dienstag, 6. Juli 2021, 12:15 Uhr

Verspätete Abgaben können aus organisatorischen Gründen leider nicht nachträglich angenommen werden. Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.