



Dr. Ralf Gerkmann
Sahand Tokasi

Wintersemester 2020/21
28.12.2020

Analysis einer Variablen (Lehramt Gymnasium)

Probeklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnummer: _____ Übungsgruppe: _____

Studiengang: ☐ Lehramt Gymnasium
☐ Wirtschaftspädagogik

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	Σ
Punkte							

Hinweise:

- (a) Die Klausur ist für eine Bearbeitungszeit von 90 Minuten vorgesehen und besteht aus 6 Aufgaben. Die reguläre Klausur Anfang März dauert 120 Minuten und besteht aus 8 Aufgaben. Pro Aufgabe ist also eine Bearbeitungszeit von 15 Minuten vorgesehen.
- (b) Bitte beachten Sie, dass für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen sind!
- (c) Sollte es nicht möglich sein, die Lösung zu einer Aufgabe auf dem dazugehörigen Blatt unterzubringen, können Sie in der Klausur zusätzliche Blätter anfordern. Wichtig ist, dass auf jedem Blatt **nur jeweils eine Aufgabe** bearbeitet wird. Schreiben Sie bitte auf keinen Fall Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt!
- (d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren Vor- und Nachnamen.
- (e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

Bearbeitungszeit: 90 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Ungleichung

$$3^n > 2^n + 3n^2 + 10 \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 4.$$

Lösung:

Induktionsanfang: Die Ungleichung ist für $n = 4$ erfüllt, denn es gilt $3^4 = 81$, $2^4 + 3 \cdot 4^2 + 10 = 74$ und $81 > 74$.

Induktionsschritt: Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$, und sei die Gültigkeit von $3^n > 2^n + 3n^2 + 10$ vorausgesetzt. Dann folgt

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3(2^n + 3n^2 + 10) > 2^{n+1} + 9n^2 + 10.$$

Weiter gilt die Äquivalenz

$$9n^2 \geq 3(n+1)^2 \Leftrightarrow 9n^2 \geq 3n^2 + 6n + 3 \Leftrightarrow 6n^2 \geq 6n + 3 \Leftrightarrow 6n \geq 6 + \frac{3}{n}$$

Die letzte Ungleichung ist für $n \geq 4$ wegen $6n \geq 24 \geq 7 \geq 6 + \frac{3}{n}$ erfüllt, also ist auch $9n^2 \geq 3(n+1)^2$ für $n \geq 4$ gültig. Insgesamt erhalten wir damit $3^{n+1} > 2^{n+1} + 9n^2 + 10 \geq 2^{n+1} + 3(n+1)^2 + 10$, wie gewünscht.

Name: _____

Aufgabe 2. (2+8 Punkte)

- (a) Sei $M_{10} = \{1, 2, \dots, 10\}$ und $f : M_{10} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^2$ für alle $x \in M_{10}$. Geben Sie die Urbildmenge $f^{-1}(]-2, 5[)$ an. Ein Nachweis ist *nicht* erforderlich.
- (b) Sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine surjektive Abbildung und $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = g(x) + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass auch h surjektiv ist.

Lösung:

zu (a) Es gilt $f^{-1}(]-2, 5[) = \{1, 2\}$. (Dies sind die einzigen beiden Elemente, die von f in das Intervall $]-2, 5[$ abgebildet werden. Das Bild von 3 liegt wegen $f(3) = 9 \geq 5$ bereits außerhalb.)

zu (b) Sei $y \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $x \in \mathbb{R}$ mit $h(x) = y$ existiert. Weil g surjektiv ist, gibt es ein $x \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = y - 1$. Es folgt $h(x) = g(x) + 1 = (y - 1) + 1 = y$.

Name: _____

Aufgabe 3. (1+6+3 Punkte)

(a) Wie ist der Absolutbetrag $|\cdot|$ auf dem Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen definiert?

(b) Sei $C = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < |x - 2| < 3\}$ und $D =]-1, 0[\cup]4, 5[$.

Zeigen Sie, dass $C = D$ gilt, indem Sie einzeln $C \subseteq D$ und $D \subseteq C$ nachweisen.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie durch Angabe eines konkreten Gegenbeispiels:

Sind A, B beliebige Mengen, dann gilt

$$\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B).$$

(Dabei bezeichnet $\mathcal{P}(A)$ die Potenzmenge von A .)

Lösung:

zu (a) Nach Definition gilt für jedes $x \in \mathbb{R}$ jeweils $|x| = x$, falls $x \geq 0$ ist, und $|x| = -x$ im Fall $x < 0$.

zu (b) Zum Beweis von $C \subseteq D$ sei $x \in C$ vorgegeben. Dann gilt $2 < |x - 2| < 3$. Wir unterscheiden die Fälle $x - 2 \geq 0$ und $x - 2 < 0$. Im ersten Fall gilt $|x - 2| = x - 2$ und somit $2 < x - 2 < 3$. Es folgt $4 < x < 5$ und somit $x \in]4, 5[\subseteq D$. Im zweiten Fall gilt $|x - 2| = 2 - x$. Daraus folgt $2 < 2 - x < 3 \Leftrightarrow 0 < -x < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 0$. Wir erhalten $x \in]-1, 0[\subseteq D$.

Zum Beweis von $D \subseteq C$ sei $x \in D$ vorgegeben. Aus $x \in]-1, 0[\cup]4, 5[$ folgt $x \in]-1, 0[$ oder $x \in]4, 5[$. Auch hier führen wir eine Fallunterscheidung durch. Im Fall $x \in]-1, 0[$ gilt $-1 < x < 0$, was zu $0 < -x < 1$ und $2 < 2 - x < 3$ äquivalent ist. Wegen $x - 2 < -2 < 0$ gilt $|x - 2| = -(x - 2) = 2 - x$. Also ist $2 < |2 - x| < 3$ in diesem Fall erfüllt, und es folgt $x \in C$. Im Fall $x \in]4, 5[$ gilt $4 < x < 5$ und $2 < x - 2 < 3$. Wegen $x - 2 > 2 > 0$ folgt $|x - 2| = x - 2$ und somit $2 < |x - 2| < 3$. Also gilt $x \in C$ auch in diesem Fall.

zu (c) Die Aussage ist im Allgemeinen falsch. Als Gegenbeispiel betrachten wir die Mengen $A = B = \emptyset$. Dann gilt einerseits $\mathcal{P}(A \setminus B) = \mathcal{P}(\emptyset \setminus \emptyset) = \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, andererseits aber $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(\emptyset) \setminus \mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\} \setminus \{\emptyset\} = \emptyset$. Die Menge $\mathcal{P}(A \setminus B)$ ist also einelementig, während $\mathcal{P}(A) \setminus \mathcal{P}(B)$ keine Elemente enthält.

Name: _____

Aufgabe 4. (2+8 Punkte)

Sei $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper.

- (a) Was bedeutet es, dass $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ vollständig ist? Bitte geben Sie die Definition oder eine äquivalente Charakterisierung an.
- (b) Sei nun vorausgesetzt, dass $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ vollständig ist. Beweisen Sie die folgende Aussage:

$$\forall x \in \mathbb{K}_+ : (x > 0_{\mathbb{K}} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : n_{\mathbb{K}}^{-2} < x)$$

Lösung:

zu (a) Hier gibt es mindestens vier verschiedene Möglichkeiten zu antworten:

- (1) Der angeordnete Körper $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ ist vollständig genau dann, wenn jeder Dedekindsche Schnitt von $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ eine Schnitzzahl besitzt. (Das ist die Definition.)
- (2) Er ist genau dann vollständig, wenn jede nichtleere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum in $\mathbb{K}$ besitzt (nach Satz (6.9)).
- (3) Er ist genau dann vollständig, wenn jede nichtleere, nach unten beschränkte Menge ein Infimum in $\mathbb{K}$ besitzt (nach Satz (6.9)).
- (4) Er ist genau dann vollständig, wenn er die Intervallschachtelungs-Eigenschaft besitzt und die Anordnung archimedisch ist (nach Satz (6.12)).

zu (b) Sei $x \in \mathbb{K}_+$ vorgegeben. Wir zeigen, dass die Implikationen „ $\Rightarrow$ “ und „ $\Leftarrow$ “ beide für x gültig sind.

„ $\Rightarrow$ “ Nach Voraussetzung gilt $x > 0_{\mathbb{K}}$. Laut Vorlesung ist damit auch der Kehrwert x^{-1} positiv. Weil $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ vollständig ist, ist die Anordnung $\mathbb{K}^+$ archimedisch. Wegen $x^{-1} > 0_{\mathbb{K}}$ und $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ gibt es deshalb ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n_{\mathbb{K}} = n \cdot 1_{\mathbb{K}} > x^{-1}$. Durch Multiplikation der Ungleichung $n_{\mathbb{K}} \geq 1_{\mathbb{K}}$ mit dem positiven Element $n_{\mathbb{K}}$ erhält man $n_{\mathbb{K}}^2 \geq n_{\mathbb{K}}$ und somit $n_{\mathbb{K}}^2 > x^{-1}$. Daraus wiederum folgt $n_{\mathbb{K}}^{-2} < (x^{-1})^{-1} = x$.

„ $\Leftarrow$ “ Nach Voraussetzung existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n_{\mathbb{K}}^{-2} < x$. Aus $n_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ folgt, dass auch das Quadrat $n_{\mathbb{K}}^2$ und dessen Kehrwert $n_{\mathbb{K}}^{-2} > 0_{\mathbb{K}}$ positiv sind. Aus $x > n_{\mathbb{K}}^{-2}$ und $n_{\mathbb{K}}^{-2} > 0_{\mathbb{K}}$ folgt $x > 0_{\mathbb{K}}$.

Name: _____

Aufgabe 5. (3+7 Punkte)

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ definiert durch $A = [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q}$.

- (a) Zeigen Sie, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.
- (b) Bestimmen Sie Minimum, Maximum, Supremum und Infimum der Menge A , sofern diese existieren (jeweils mit Nachweis). Dass $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegt, darf dabei ohne Beweis verwendet werden.

Lösung:

zu (a) Wegen $0 \leq 1 \leq \sqrt{2}$ und $1 \in \mathbb{Q}$ gilt $1 \in A$. Aus $0 \leq 0 \leq \sqrt{2}$ und $0 \in \mathbb{Q}$ folgt auch $0 \in A$. Wäre A ein Intervall, dann müsste also jedes $c \in \mathbb{R}$ mit $0 < c < 1$ in A liegen. Wegen $1 < \sqrt{2} < 2$ gilt $\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, insbesondere also $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$. Also müsste $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in A liegen. Insbesondere wäre dann $\frac{1}{\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$ und damit auch $\sqrt{2} = (\frac{1}{\sqrt{2}})^{-1} \in \mathbb{Q}$. Aber $\sqrt{2}$ ist irrational. Also gilt $\frac{1}{\sqrt{2}} \notin A$, und folglich ist A kein Intervall.

zu (b) Wie wir bereits in Teil (a) gesehen haben, gilt $0 \in A$. Für jedes $x \in A$ gilt $x \in [0, \sqrt{2}]$ und damit insbesondere $x \geq 0$. Also ist 0 untere Schranke von A und zugleich in A enthalten. Nach Definition des Minimums gilt also $\min A = 0$. Laut Vorlesung ist das Minimum einer Menge (sofern es existiert) zugleich das Infimum. Somit gilt auch $\inf A = 0$.

Für alle $x \in A$ gilt $x \in [0, \sqrt{2}]$ und somit $\sqrt{2} \geq x$. Dies zeigt, dass $\sqrt{2}$ eine obere Schranke von A ist. Nehmen wir an, die Menge A besitzt eine noch kleinere obere Schranke $s < \sqrt{2}$. Dann ist auch $s' = \max\{0, s\}$ wegen $s' \geq s$ eine obere Schranke von A . Wegen $0 < \sqrt{2}$ und $s < \sqrt{2}$ gilt auch $s' < \sqrt{2}$, insgesamt also $0 < s' < \sqrt{2}$. Weil die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, gibt es im offenen Intervall $]s', \sqrt{2}[$ ein $y \in \mathbb{Q}$. Wegen $0 \leq s' < y \leq \sqrt{2}$ und $y \in \mathbb{Q}$ gilt dann $y \in [0, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} = A$. Aber $y > s'$ und $y \in A$ stehen im Widerspruch dazu, dass s' eine obere Schranke von A ist.

Also besitzt die Menge A keine kleinere obere Schranke als $\sqrt{2}$. Folglich ist $\sqrt{2}$ die kleinste obere Schranke, es gilt also $\sup A = \sqrt{2}$. Nehmen wir nun an, dass A auch ein Maximum besitzt. Dann müsste $\max A = \sup A = \sqrt{2}$ gelten. Nach Definition des Maximums wäre $\sqrt{2}$ dann ein Element von A , was insbesondere $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ bedeuten würde. Aber $\sqrt{2}$ ist irrational. Also war die Annahme falsch, und folglich existiert für A kein Maximum.

Name: _____

Aufgabe 6. (2+8 Punkte)

- (a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ an, und eine weitere Folge, die keine Cauchyfolge ist. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.
- (b) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a_n} = 0 \text{ gilt.}$$

Lösung:

zu (a) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ erfüllt ist.

zu (b) Nach Voraussetzung gilt $a_n > 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Daraus folgt insbesondere $|a_n| > 2^n$ und $|a_n^{-1} - 0| = \frac{1}{|a_n|} < 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $2^{-N} < \varepsilon$. Für alle $n \geq N$ folgt dann $|a_n^{-1} - 0| < 2^{-n} \leq 2^{-N} < \varepsilon$.

Alternativ kann auch mit dem Sandwich-Lemma argumentiert werden:

Aus $a_n > 2^n$ und $a_n, 2^n \in \mathbb{R}^+$ folgt $0 \leq a_n^{-1} \leq 2^{-n}$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Laut Vorlesung gilt $\lim_n 2^{-n} = 0$ und $\lim_n 0 = 0$ (hier wird also die Folge mit dem konstanten Wert 0 betrachtet). Aus den Ungleichungen $0 \leq a_n^{-1} \leq 2^{-n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und dem Sandwich-Lemma folgt nun, dass auch die Folge $(a_n^{-1})_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert, und dass für den Grenzwert $0 = \lim_n 0 \leq \lim_n a_n^{-1} \leq \lim_n 2^{-n} = 0$, also $\lim_n a_n^{-1} = 0$, gilt.

Eine dritte Möglichkeit wäre, mit dass man zunächst $\lim_n a_n = +\infty$ beweist:

Sei $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $2^N > \kappa$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ folgt daraus $a_n > 2^n \geq 2^N$. Damit ist $\lim_n a_n = +\infty$ nachgewiesen. Aus der Vorlesung (Tabelle auf S. 85) ist bekannt: Konvergiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $+\infty$, dann konvergiert die Folge der Kehrwerte gegen 0 (letzter Tabelleneintrag). Also gilt auch hier $\lim_n a_n^{-1} = 0$.