LMU | LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN | MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2021/22
25.03.2022

Analysis einer Variablen (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Online-Nachholklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(b) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(c) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Versenden per Email zur Verfügung. Akzeptiert wird nur eine einzelne, zusammenhängende PDF-Datei. Einsendungen, die nach 13:15:00 Uhr eintreffen, können nicht gewertet werden.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} (3k+8) \quad = \quad \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{19}{2}n.$$

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie hier tatsächlich einen Induktionsbeweis angeben. Ein direkter Beweis wird nicht akzeptiert.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = (x-5)^2 + 1$.

(a) Bestimmen Sie die Bildmenge $f([3,8])$ und die Urbildmenge $f^{-1}([-1,2])$ (jeweils mit Nachweis).

(b) Zeigen Sie, dass f weder injektiv noch surjektiv ist.

(c) Geben Sie eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass die Einschränkung $f|_A$ von f injektiv ist (kein Nachweis erforderlich).

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (6+4 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n a_n = +\infty$. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+a_n^2} \quad = \quad 0 \qquad \text{gilt.}$$

(b) Entscheiden Sie, ob für die Implikation aus Teil (a) auch die Umkehrung gilt. Wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit $\lim_n \frac{1}{1+a_n^2} = 0$ ist, gilt dann immer $\lim_n a_n = +\infty$? Beweisen Sie die Umkehrung, oder geben Sie ein konkretes Gegenbeispiel an, und weisen Sie nach, dass es sich tatsächlich um ein Gegenbeispiel handelt.

Hinweis: Arbeiten Sie in beiden Aufgabenteilen direkt mit der Definition der Konvergenz bzw. der uneigentlichen Konvergenz. Das „Rechnen mit Unendlich", in Aufgabenteil (a) beispielsweise in der Form $\frac{1}{1+(+\infty)^2} = 0$, wird nicht als Lösung akzeptiert.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie geeignete Kriterien angeben und deren Voraussetzungen überprüfen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+3}{3^n}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-3}{n^4+7}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

Name: ____________________

Aufgabe 5. (3+5+2 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -x-1 & \text{für } x < 0 \\ x-1 & \text{für } 0 \leq x < 1 \\ x-2 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt 1 unstetig ist.

(b) Zeigen Sie, dass f in den Punkten -1 und 0 stetig ist.

(c) Geben Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ an. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (4+4+2 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $|f(x) - 3x - 2| \leq x^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass f im Nullpunkt differenzierbar ist, und bestimmen Sie die Ableitung $f'(0)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x + 2|$ in -2 nicht differenzierbar ist.

(c) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $h(1) = 3$ und $h(3) = 7$. Beweisen Sie, dass ein $x \in \mathbb{R}$ mit $h'(x) = 2$ existiert.

Hinweis: Arbeiten Sie in Teil (b) entweder direkt mit der Definition der Differenzierbarkeit, oder verwenden Sie die aus der Vorlesung bekannte Tatsache, dass die Betragsfunktion im Nullpunkt nicht differenzierbar ist.

Name: ____

Aufgabe 7. (4+3+3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \quad = \quad x^3 - \tfrac{9}{2}x^2 + 6x + 2.$$

(a) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema der Funktion f.

(b) Begründen Sie, dass f kein globales Extremum besitzt.

(c) Wenn $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit einem lokalen Maximum im Nullpunkt ist, folgt daraus, dass g im Nullpunkt differenzierbar ist und $g'(0) = 0$ gilt? Geben Sie einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel an (mit Nachweis).

Name: ____

Aufgabe 8. (6+4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(3x^2 + \sqrt{5x^4 + 2})$.

(a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion von f.

(b) Geben Sie die Bildmenge $f(\mathbb{R})$ an, und begründen Sie Ihr Ergebnis durch eine geeignete Anwendung des Zwischenwertsatzes.

Hinweis: In Teil (a) ist ein kleinschrittiger Rechenweg anzugeben. Die alleinige Angabe der Lösung wird nicht akzeptiert.