Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2021/22
25.02.2022

Analysis einer Variablen (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Online-Nachholklausur

Nachname: ____________________ Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❑ Lehramt Gymnasium
- ❑ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(b) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(c) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Versenden per Email zur Verfügung. Akzeptiert wird nur eine einzelne, zusammenhängende PDF-Datei. Einsendungen, die nach 13:15:00 Uhr eintreffen, können nicht gewertet werden.

(d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-7) \quad = \quad n^2 - 6n.$$

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie hier tatsächlich einen Induktionsbeweis angeben. Ein direkter Beweis wird nicht akzeptiert.

Name: ____________________

Aufgabe 2. (4+4+2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = (x-5)^2$.

(a) Bestimmen Sie die Bildmenge $f([3,8])$ und die Urbildmenge $f^{-1}([-1,2])$ (jeweils mit Nachweis).

(b) Zeigen Sie, dass f weder injektiv noch surjektiv ist.

(c) Geben Sie eine nichtleere Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, so dass die Einschränkung $f|_A$ von f injektiv ist (kein Nachweis erforderlich).

Name: ____________________

Aufgabe 3. (4+3+3 Punkte)

(a) Geben Sie ein konkretes Beispiel für eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ an, die unbeschränkt ist, kein Intervall ist, aber ein Maximum besitzt. Weisen Sie die Eigenschaft, dass A kein Intervall ist, nach. (Für die anderen beiden Eigenschaften ist kein Nachweis erforderlich.)

(b) Sei $B = \{2^{-n} + 3^{-n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$. Geben Sie die Menge der unteren Schranken von B an (mit Nachweis).

(c) Bestimmen Sie das Maximum und das Infimum von B (bitte ebenfalls mit Nachweis).

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (3+3+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie geeignete Kriterien angeben und deren Voraussetzungen überprüfen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\ln(n)+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-7}{3^n n^2}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+5}{n^2+2n+3}$

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (3+3+4 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(x) \geq x + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ gilt.

(b) Weisen Sie nach, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x) \quad = \quad \begin{cases} 1 - x & \text{für } x < 2 \\ x^2 - 5 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

im Punkt 1 stetig ist.

(c) Zeigen Sie, dass g auch im Punkt 2 stetig ist.

Name: ____________________

Aufgabe 6. (4+2+4 Punkte)

(a) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei Funktionen, $a \in \mathbb{R}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, und es gelte $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Zeigen Sie: Ist die Funktion f im Punkt a differenzierbar, dann gilt dassselbe für g, und es ist $g'(a) = f'(a)$.

(b) Wir betrachten nun die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x < 0 \\ 0 & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Begründen Sie mit Hilfe von Teil (a), dass f im Punkt -1 differenzierbar ist, und geben Sie $f'(-1)$ an.

(c) Zeigen Sie, dass f auch im Punkt 0 differenzierbar ist, und bestimmen Sie $f'(0)$.

Name: ____________________

Aufgabe 7. (6+2+2 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{x^2 + 2}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste und zweite Ableitung von f.

(b) Bestimmen Sie alle lokalen Extrema von f.

(c) Untersuchen Sie, ob es sich bei den von Ihnen gefundenen lokalen Extrema um globale Extremstellen handelt.

Name: ____

Aufgabe 8. (6+2+2 Punkte)

Wir betrachten noch einmal die Funktion aus Aufgabe 7, also $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) \quad = \quad \frac{1}{x^2+2}.$$

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass $f(\mathbb{R}) = \left]0, \frac{1}{2}\right]$ gilt.

(b) Das Maximumsprinzip besagt, dass eine Funktion unter bestimmten Voraussetzungen beschränkt ist und ihr Minimum und Maximum annimmt. Welche Voraussetzungen sind das?

(c) Teil (a) zeigt, dass die Funktion f kein (globales) Minimum besitzt. Welche Voraussetzung des Maximumsprinzips ist durch die Funktion f nicht erfüllt?