Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 7 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Aussage $\lim_n a_n = 0$ bedeutet, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. In Quantorenschreibweise lautet die Aussage

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \geq N : |a_n - a| < \varepsilon.$$

zu (b) Es bedeutet, dass für beliebig vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ alle bis auf endlich viele Folgenglieder in einem ε-Streifen um den Wert a liegen. Dabei handelt es sich um den horizontalen Streifen, der durch $a - \varepsilon$ und $a + \varepsilon$ nach unten bzw. oben begrenzt ist.

zu (c) Diese Bedingung wird zum Beispiel durch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und den Wert $a = 0$ erfüllt. Diese Folge ist laut Vorlesung divergent. Setzt man aber $\varepsilon = 2$, dann gibt es für jedes $N \in \mathbb{N}$ ein $n \geq N$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$. Denn gleichgültig ob $a_n = 1$ oder $a_n = -1$ ist, die Ungleichung $|a_n - 0| < 2$ ist immer erfüllt.

zu (d) Die Grenzwertsätze besagen, dass der Grenzübergang und die Anwendung arithmetischer Operationen vertauscht werden dürfen. Für die Addition gilt beispielsweise

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Zu beachten ist dabei, dass die Grenzwertsätze nur angewendet werden dürfen, wenn $\lim_n a_n$ und $\lim_n b_n$ als Grenzwerte in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ existieren. Bei der Division muss außerdem vorausgesetzt werden, dass der Grenzwert der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ungleich 0 ist.

zu (e) In bestimmten Fällen kann aus der uneigentlichen Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch auf das Konvergenzverhalten von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder $(a_n b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geschlossen werden. Konvergieren $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beispielsweise gegen $+\infty$, dann gilt dasselbe für die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wie in der Vorlesung gezeigt wurde. Im Unterschied zur gewöhnlichen Konvergenz kann es aber auch passieren, dass über das Konvergenzverhalten von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht ausgesagt werden kann, obwohl die uneigentlichen Grenzwerte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bekannt sind. Dies ist zum Beispiel der Fall, wenn $\lim_n a_n = +\infty$ und $\lim_n b_n = -\infty$ ist.

Aufgabe 1

zu (a) Durch Umformen und Anwendung der Grenzwertsätze erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 - n^2}{n} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1 - n^2}{n} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} \quad =$$
$$\lim_{n\to\infty} (2 + \tfrac{1}{n}) \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty} \tfrac{1}{n} \quad = \quad 2 + 0 \quad = \quad 2.$$

zu (b) Sei $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt jeweils

$$a_n \quad = \quad \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad = \quad \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad = \quad \frac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}.$$

Es gilt also jeweils $|a_n - 0| = |a_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}}$. Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ so groß gewählt, dass $N > \varepsilon^{-2}$ gilt. Dann folgt $N^{-1} < \varepsilon^2$ und $\frac{1}{\sqrt{N}} = N^{-1/2} < \varepsilon$. Für alle $n \ge N$ gilt also $|a_n - 0| \le \frac{1}{\sqrt{n}} \le \frac{1}{\sqrt{N}} < \varepsilon$. Damit ist $\lim_n a_n = 0$ nachgewiesen.

Aufgabe 2

zu (a) Sei $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Zunächst schätzen wir die Folgenglieder b_n nach oben ab. Wegen $\lim_n b_n = c$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $|b_n - c| < \frac{1}{2}|c|$ für alle $n \ge N_1$. Daraus folgt $c - \frac{1}{2}|c| < b_n < c + \frac{1}{2}|c|$, wegen $c < 0$ also $\frac{3}{2}c < b_n < \frac{1}{2}c$ für alle $n \ge N_1$. Insbesondere ist b_n für alle $n \ge N_1$ negativ.

Wegen $\lim_n a_n = +\infty$ gibt es auch ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 2|c^{-1}|\kappa = -2c^{-1}\kappa$ für alle $n \ge N_2$. Setzen wir $N = \max\{N_1, N_2\}$, dann erhalten wir für alle $n \ge N$ insgesamt $a_n b_n < a_n \frac{1}{2}c < (-2c^{-1})\kappa \cdot \frac{1}{2}c = -\kappa$ (wobei zu beachten ist, dass sich die Ungleichung $a_n > -2c^{-1}\kappa$ durch die Multiplikation mit der negativen Zahl $\frac{1}{2}c$ umdreht).

zu (b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = n$ und $b_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_n b_n = 0$ gilt. Außerdem ist $\lim_n a_n = +\infty$, denn für vorgegebenes $\kappa \in \mathbb{R}^+$ können wir ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \kappa$ wählen und erhalten für alle $n \ge N$ die Abschätzung $a_n = n \ge N > \kappa$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n b_n = 1$. Daraus folgt $\lim_n (a_n b_n) = 1$.

zu (c) Hier könnte man zum Beispiel $c_n = n^2$ und $d_n = -\frac{1}{n}$ wählen. Es ist dann $c_n d_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und diese Folge konvergiert laut Vorlesung uneigentlich gegen $-\infty$.

Aufgabe 3

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit der angegebenen Eigenschaft und nehmen wir an, dass die Folge gegen eine reelle Zahl a konvergiert. Dann gibt es insbesondere für $\varepsilon = 1$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 1$ für alle $n \ge N$. Für diese n gilt also $a - 1 < a_n < a + 1$.

Nach Voraussetzung gibt es ein $m \ge N$ mit $a_m > 1$. Daraus folgt $a + 1 > a_m > 1$, also $a > 0$. Andererseits existiert auch ein $n \ge N$ mit $a_n < -1$. Dies liefert $a - 1 < a_n < -1$ und somit $a < 0$. Aber die Ungleichungen $a > 0$ und $a < 0$ können nicht zugleich erfüllt sein. Dies zeigt, dass die Annahme falsch war und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert.