Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 5 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Eine Anordnung auf einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Teilmenge $\mathbb{K}^+ \subseteq \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft, dass für jedes $x \in \mathbb{K}$ genau eine der drei Bedingungen $x \in \mathbb{K}^+$, $x = 0_{\mathbb{K}}$ oder $-x \in \mathbb{K}^+$ erfüllt ist, und dass mit $x, y \in \mathbb{K}^+$ auch jeweils $x + y$ und xy in $\mathbb{K}^+$ liegen. Die Aussage $x \leq y$ bedeutet nach Definition, dass $y - x$ in $\mathbb{K}_+ = \mathbb{K}^+ \cup \{0_{\mathbb{K}}\}$ liegt.

zu (b) Bei einer archimedischen Anordnung $\mathbb{K}^+$ gibt es für vorgegebene $x, y \in \mathbb{K}^+$ jeweils ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n_{\mathbb{K}}x > y$.

zu (c) Eine obere Schranke von M ist ein Element $a \in \mathbb{K}$ mit der Eigenschaft $a \geq x$ für alle $x \in M$.

zu (d) Das Supremum von M ist das kleinste Element in der Menge der oberen Schranken von M . Besitzt M ein Maximum, dann ist dieses zugleich das Supremum. Umgekehrt braucht aber das Supremum einer Menge M selbst nicht in M zu liegen, ist in diesem Fall also kein Maximum von M .

Aufgabe 1

„ $\Rightarrow$ “ Nehmen wir an, dass die Anordnung $\mathbb{K}^+$ archimedisch ist, zugleich aber ein $a \in \mathbb{K}$ mit $a \geq n_{\mathbb{K}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Wegen $a \geq 1_{\mathbb{K}}$ und $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$ gilt dann $a > 0_{\mathbb{K}}$, also $a \in \mathbb{K}^+$. Wir können nun die archimedische Eigenschaft auf $x = 1_{\mathbb{K}}$ und $y = a$ anwenden und erhalten ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n_{\mathbb{K}} = n_{\mathbb{K}}x > a$. Es gilt dann zugleich $n_{\mathbb{K}} > a$ und $a \geq n_{\mathbb{K}}$. Daraus würde $n_{\mathbb{K}} > n_{\mathbb{K}}$ und insbesondere $n_{\mathbb{K}} \neq n_{\mathbb{K}}$ folgen, ein Widerspruch.

„ $\Leftarrow$ “ Setzen wir voraus, dass kein $a \in \mathbb{K}$ mit $a \geq n_{\mathbb{K}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Um zu zeigen, dass $\mathbb{K}^+$ archimedisch ist, seien $x, y \in \mathbb{K}^+$ vorgegeben. Angenommen, es gibt kein $n \in \mathbb{K}$ mit $n_{\mathbb{K}}x > y$. Dann folgt $n_{\mathbb{K}}x \leq y$ und somit $n_{\mathbb{K}} \leq \frac{y}{x}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann wäre also $a = \frac{y}{x}$ doch ein Element mit $a \geq n_{\mathbb{K}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung.

Aufgabe 2

zu (b) Es gilt $\mathcal{S}^+(A) = [4, +\infty[$. Ist nämlich $s \in \mathcal{S}^+(A)$, dann gilt $s \geq a$ für alle $a \in A$, insbesondere $s \geq 4$ wegen $4 \in A$. Daraus folgt $s \in [4, +\infty[$. Ist umgekehrt $s \in [4, +\infty[$ und $a \in A$, dann gilt $1 < a \leq 2$ oder $3 < b \leq 4$, in jedem Fall $a \leq 4$. Insgesamt gilt also $s \geq 4 \geq a$. Dies zeigt, dass s eine obere Schranke von A ist, also in $\mathcal{S}^+(A)$ liegt.

Nun beweisen wir die Gleichung $\mathcal{S}^-(A) =]-\infty, 1]$. Ist $s \in \mathcal{S}^-(A)$, dann gilt $s \leq a$ für alle $a \in A$. Wegen $1 + \frac{1}{n} \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt insbesondere $s \leq 1 + \frac{1}{n}$ und $s - 1 \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Auf Grund der Rechenregeln für archimedische Anordnungen kann $s - 1$ damit keine positive Zahl sein. Aus $s - 1 \leq 0$ folgt $s \leq 1$ und damit $s \in]-\infty, 1]$. Sei umgekehrt $s \in]-\infty, 1]$ vorgegeben. Dann gilt $s \leq 1$. Für jedes $a \in A$ gilt $a > 1$, also insbesondere $a > 1 \geq s$. Dies zeigt, dass s eine untere Schranke von A ist, also in $\mathcal{S}^-(A)$ liegt.

Es gilt $\mathcal{S}^+(B) = [1, +\infty[$. Ist nämlich $s \in \mathcal{S}^+(B)$, dann gilt $s \geq b$ für alle $b \in B$, also $s \geq \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere gilt $s \geq 1$ und damit $s \in [1, +\infty[$. Setzen wir umgekehrt $s \in [1, +\infty[$ voraus. Dann gibt $s \geq 1 \geq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $s \geq b$ für alle $b \in B$. Dies zeigt, dass s eine obere Schranke von B ist, also in $\mathcal{S}^+(B)$ liegt.

Zum Schluss zeigen wir $\mathcal{S}^-(B) =]-\infty, 0]$. Ist $s \in \mathcal{S}^-(B)$, dann gilt $s \leq b$ für alle $b \in B$, also $s \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass s nicht positiv sein kann (denn andernfalls gäbe es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < s$). Es folgt $s \leq 0$, also $s \in]-\infty, 0]$. Setzen wir umgekehrt $s \in]-\infty, 0]$, also $s \leq 0$ voraus. Dann gilt $s \leq 0 < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also $s \leq b$ für alle $b \in B$. Dies zeigt, dass s eine untere Schranke von B ist, also in $\mathcal{S}^-(B)$ liegt.

zu (c) Das größte Element von $\mathcal{S}^-(A) =]-\infty, 1]$ ist 1, also gilt $\inf(A) = 1$. Wegen $1 \notin A$ besitzt die Menge A aber kein Minimum. Das kleinste Element von $\mathcal{S}^+(A) = [4, +\infty[$ ist 4, also gilt $\sup(A) = 4$. Wegen $4 \in A$ handelt es sich zugleich um das Maximum der Menge, es gilt also $\max(A) = 4$.

Das größte Element von $\mathcal{S}^-(B) =]-\infty, 0]$ ist 0, also gilt $\inf(B) = 0$. Wegen $1 \notin B$ besitzt die Menge B aber kein Minimum. Das kleinste Element von $\mathcal{S}^+(B) = [1, +\infty[$ ist 1, also gilt $\sup(B) = 1$. Wegen $1 \in B$ handelt es sich zugleich um das Maximum der Menge, es gilt also $\max(B) = 1$.

zu (d) Die Menge A ist kein Intervall, denn beispielsweise liegen 2 und 4 in A , und es gilt $2 < 3 < 4$. Aber 3 ist nicht in A enthalten. Ebenso ist B kein Intervall. Denn beispielsweise liegen $\frac{1}{2}$ und 1 in B , und es gilt $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$. Aber $\frac{3}{4}$ ist kein Element der Menge B .

Aufgabe 3

zu (a) Weil M nichtleer und beschränkt ist, existieren $c = \inf(M)$ und $d = \sup(M)$ als reelle Zahlen. Weil c nach Definition die größte untere Schranke von M ist, gilt $c \geq s$ für alle $s \in \mathcal{S}^-(M)$ und somit $\mathcal{S}^-(M) \subseteq]-\infty, c]$. Ist umgekehrt $s \in]-\infty, c]$, dann gilt $s \leq c \leq x$ für alle $x \in M$, denn c ist eine untere Schranke von M . Dies zeigt, dass auch s eine untere Schranke von M ist, also $s \in \mathcal{S}^-(M)$ gilt.

Weil d nach Definition die kleinste obere Schranke von M ist, gilt $d \leq s$ für alle $s \in \mathcal{S}^+(M)$ und somit $\mathcal{S}^+(M) \subseteq [d, +\infty[$. Ist umgekehrt $s \in [d, +\infty[$, dann gilt $s \geq d \geq x$ für alle $x \in M$, denn d ist eine obere Schranke von M . Dies zeigt, dass auch s eine obere Schranke von M ist, also $s \in \mathcal{S}^+(M)$ gilt.

zu (b) Zunächst zeigen wir, dass $\sup(M) + \sup(N)$ eine obere Schranke von $M + N$ ist. Weil $\sup(M)$ eine obere Schranke von M ist, gilt $m \leq \sup(M)$ für alle $m \in M$. Ebenso gilt $n \leq \sup(N)$ für alle $n \in N$. Es folgt $m + n \leq \sup(M) + \sup(N)$ für alle $m \in M$ und $n \in N$, also $x \leq \sup(M) + \sup(N)$ für alle $x \in M + N$.

Um zu zeigen, dass $\sup(M) + \sup(N)$ das Supremum von $M + N$ ist, genügt es nun nach Proposition (6.7) nachzuweisen, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $x \in M + N$ mit $x > \sup(M) + \sup(N) - \varepsilon$ existiert. Anwendung von Prop. (6.7) auf die Menge M liefert ein $y \in M$ mit $y > \sup(M) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Ebenso erhalten wir ein $z \in N$ mit $z > \sup(N) - \frac{1}{2}\varepsilon$. Setzen wir $x = y + z$, dann folgt $x > (\sup(M) - \frac{1}{2}\varepsilon) + (\sup(N) - \frac{1}{2}\varepsilon) = \sup(M) + \sup(N) - \varepsilon$.