

Analysis einer Variablen

— Blatt 4 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ erfüllen jeweils das Assoziativ- und das Kommutativgesetz erfüllen. Außerdem erfüllen $+$ und $\cdot$ gemeinsam das Distributivgesetz. Es gibt spezielle Elemente $0_{\mathbb{K}}$ und $1_{\mathbb{K}}$ mit $0_{\mathbb{K}} + a = a$ und $1_{\mathbb{K}} \cdot a = a$ für alle $a \in \mathbb{K}$. Für jedes $a \in \mathbb{K}$ gibt es ein $b \in \mathbb{K}$ mit $a + b = 0_{\mathbb{K}}$. Es ist $0_{\mathbb{K}} \neq 1_{\mathbb{K}}$, und für jedes $a \in \mathbb{K}$ mit $a \neq 0_{\mathbb{K}}$ gibt es ein $b \in \mathbb{K}$ mit $ab = 1_{\mathbb{K}}$.

zu (b) Das Element $-a$ ist das eindeutig bestimmte Körperelement mit der Eigenschaft $a + (-a) = 0_{\mathbb{K}}$. Nach Definition ist $a - b = a + (-b)$.

zu (c) Eine Halbordnung $\leq$ auf einer Menge X ist eine Relation auf X , die reflexiv ($\forall x \in X : x \leq x$), antisymmetrisch ($\forall x, y \in X : x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$) und transitiv ($\forall x, y, z \in X : x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$) ist. Gilt für alle $x, y \in X$ zusätzlich $x \leq y$ oder $y \leq x$, dann spricht man von einer Totalordnung.

zu (d) Ist $\mathbb{K}^+$ eine Anordnung, dann ist durch $x \leq y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{K}^+ \cup \{0_{\mathbb{K}}\}$ eine Totalordnung $\leq$ auf $\mathbb{K}$ definiert.

Aufgabe 1

Weil 0 das Nullelement von $\mathbb{K}$ ist, gilt $0 + 0 = 0$, $0 + 1 = 1$ und $0 + a = a$, ebenso $1 + 0 = 1$ und $a + 0 = a$. Damit sind fünf Einträge in der Verknüpfungstabelle von $+$ bereits festgelegt. Nun bestimmen wir das Element $1 + a$. Angenommen, es ist $1 + a = 1$. Addition von -1 auf beiden Seiten liefert $a = 0$, im Widerspruch dazu, dass $0, 1, a$ drei *verschiedene* Elemente von $\mathbb{K}$ sind. Wäre $1 + a = a$, dann würde Addition von $-a$ die Gleichung $1 = 0$ liefern, was ebenfalls ausgeschlossen ist. Also bleibt nur $1 + a = 0$, und aus der Kommutativität von $+$ folgt $a + 1 = 0$.

Bestimmen wir nun das Element $1 + 1$. Aus $1 + 1 = 1$ würde $1 = 0$ folgen. Ebenso ist $1 + 1 = 0$ nicht möglich, denn dies würde bedeuten, dass das Element 1 sein eigenes Negatives ist. Aber wegen $1 + a = 0$ ist a das Negative von 1 . Also muss $1 + 1 = a$ gelten. Als letzten Eintrag der Verknüpfungstabelle müssen wir $a + a$ bestimmen. Aus $a + a = a$ würde $a = 0$ folgen. Im Fall $a + a = 0$ wäre a sein eigenes Negatives, aber wegen $1 + a = 0$ ist das Negative von a gleich 1 . Also bleibt nur $a + a = 1$.

Nun bestimmen wir die Verknüpfungstabelle von $\cdot$. Aus der Vorlesung ist bekannt (Proposition (5.2)(ii)), dass die Multiplikation des Nullelements mit beliebigen Körperelementen jeweils Null liefert. Es gilt also $0 \cdot 0 = 0$, $0 \cdot 1 = 0$, $0 \cdot a = 0$, und $1 \cdot 0 = 0$, $a \cdot 0 = 0$ auf Grund der Kommutativität. Weil 1 das Einselement von $\mathbb{K}$ ist, gilt $1 \cdot 1 = 1$ und $1 \cdot a = a$ sowie $a \cdot 1 = a$ nach dem Kommutativgesetz. Als einziger Eintrag muss noch $a \cdot a$ bestimmt werden. Der Fall $a \cdot a = 0$ kann nicht eintreten, weil laut Vorlesung das Produkt von zwei Körperelementen ungleich Null wieder ungleich Null ist. Wäre $a \cdot a = a$ gelten, dann könnte diese Gleichung mit a^{-1} multipliziert werden. Dies würde $a = 1$ ergeben, im Widerspruch zu $a \neq 1$. Also muss $a \cdot a = 1$ gelten.

Die vollständigen Verknüpfungstabellen sind also gegeben durch

+	0	1	a
0	0	1	a
1	1	a	0
a	a	0	1

,

·	0	1	a
0	0	0	0
1	0	1	a
a	0	a	1

Aufgabe 2

zu (a) Die Aussage ist wahr. Zum Beweis sei $a \in \mathbb{K}$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $b \in \mathbb{K}$ mit $b > a$ existiert. Laut Vorlesung gilt $1_{\mathbb{K}} > 0_{\mathbb{K}}$, und daraus folgt $a + 1_{\mathbb{K}} > a + 0_{\mathbb{K}}$, also $a + 1_{\mathbb{K}} > a$. Das Element $b = a + 1_{\mathbb{K}}$ hat also die gewünschte Eigenschaft.

zu (b) Die Aussage ist falsch. Nehmen wir an, $a \in \mathbb{K}$ ein Element mit der Eigenschaft, dass $\forall b \in \mathbb{K} : b > a$ gültig ist. Dann gilt insbesondere $a > a$, im Widerspruch zu $a = a$.

zu (c) Die Aussage ist falsch. Wäre sie wahr, dann wäre insbesondere die Aussage

$$\exists b \in \mathbb{K} : \forall c \in \mathbb{K} : 0_{\mathbb{K}} < b < c$$

gültig. Es gäbe dann ein $b \in \mathbb{K}$, so dass $\forall c \in \mathbb{K} : 0_{\mathbb{K}} < b < c$ erfüllt ist. Insbesondere würde dann $0_{\mathbb{K}} < b < 0_{\mathbb{K}}$ gelten. Daraus würde $0_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$ folgen, was $0_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ widerspricht.

Aufgabe 3

zu (a) Weil $\mathbb{K}$ nur endlich viele verschiedene Elemente besitzt, gibt es natürliche Zahlen $r, s \in \mathbb{N}$ mit $r < s$ und $r1_{\mathbb{K}} = s1_{\mathbb{K}}$. Es gibt also ein $n \in \mathbb{N}$ mit $s = r + n$, und daraus folgt $r1_{\mathbb{K}} = s1_{\mathbb{K}} = r1_{\mathbb{K}} + n1_{\mathbb{K}}$. Addieren wir $-r1_{\mathbb{K}}$ auf beiden Seiten, dann erhalten wir $n1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$. Dies zeigt, dass jedenfalls ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ existiert.

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft $n1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, und nehmen wir an, n ist keine Primzahl. Dann gilt entweder $n = 1$, oder es gibt natürliche Zahlen r, s mit $n = rs$ und $1 < r, s < n$. Im Fall $n = 1$ wäre $1_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$; in Körpern ist aber ausgeschlossen, dass Null- und Einselement zusammenfallen. Im zweiten Fall wäre $r_{\mathbb{K}}s_{\mathbb{K}} = n_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$, und da $\mathbb{K}$ ein Körper ist, würde daraus nach Proposition (5.2)(iv) $r_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ oder $s_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$ folgen. Aber wegen $r, s < n$ stehen beide Gleichungen im Widerspruch zur Minimalität von n . Die Annahme, dass n keine Primzahl ist, war also falsch.

zu (b) Sei $\mathbb{K}$ ein endlicher Körper, und nehmen wir an, dass auf $\mathbb{K}$ eine Anordnung $\mathbb{K}^+$ existiert. Nach Aufgabenteil (a) gibt es ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n_{\mathbb{K}} = 0_{\mathbb{K}}$. Nach Proposition (5.8)(ii) ist $n_{\mathbb{K}}$ ein positives Element. Aber durch die Anordnungsaxiome in Definition (5.5) wird ausgeschlossen, dass $0_{\mathbb{K}}$ ein positives Element ist. Also kann auf $\mathbb{K}$ keine Anordnung existieren.