Lösung Globalübungsblatt 4

Aufgabe 1 $\quad \mathbb{K} = \{0, 1, a, b\}$

<u>zu (a)</u> z.zg.: Ist eines der Elemente $1, a, b$ sein eigenes Negatives, dann auch die beiden anderen.

Setze also voraus, dass ein $c \in \{1, a, b\}$ mit $c = -c$ existiert.

Da $\mathbb{K}$ ein Körper und $c \neq 0$ ist, existiert der Kehrwert c^{-1}.

$c = -c \Rightarrow c \cdot c^{-1} = -c \cdot c^{-1} \Rightarrow 1 = -1$

$1 = -1 \Rightarrow 1 \cdot a = (-1) \cdot a \Rightarrow a = -a$

$1 = -1 \Rightarrow 1 \cdot b = (-1) \cdot b \Rightarrow b = -b$

<u>zu (b)</u> z.zg.: $c = -c \quad \forall c \in \mathbb{K}$

Lt. Vorlesung gilt $-0 = 0$.

<u>Beh.:</u> Mindestens eines der drei Elemente $1, a, b$ ist sein eigenes Negatives.

Ang. $-1 \neq 1$. Dann gilt $-1 \in \{0, a, b\}$.

<u>1. Fall:</u> $-1 = 0 \Rightarrow 1 = -(-1) = -0 = 0$ ↯ zu $1 \neq 0$

<u>2. Fall:</u> $-1 \overset{(*)}{=} a$ Betrachte das Negative $-b$ von b. Ist $-b = b$, dann ist die Beh. erfüllt. Ansonsten gilt $-b \in \{0, 1, a\}$.

Ang. $-b = 0 \Rightarrow b = -(-b) = -0 = 0$ ↯ Ang. $-b = 1 \Rightarrow b = -1 = a$ ↯

Ang. $-b = a \overset{(*)}{\Rightarrow} -1 = -b \Rightarrow 1 = b$ ↯ Also ist Beh. im 2. Fall erfüllt.

<u>3. Fall:</u> $-1 = b$ läuft analog zum 2. Fall, vertausche die Rollen von a und b. Also ist die Beh. in jedem Fall erfüllt.

<u>zu (c)</u> Lt. Angabe ist $0_{\mathbb{K}} = 0$, $1_{\mathbb{K}} = 1$.

$+$	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	b	a
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

$\cdot$	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

Lt. Vl. gilt $0 + c = c \ \forall c \in \mathbb{K}$, wegen der Kommutativität auch $c + 0 = c \ \forall c \in \mathbb{K}$. Jedes Element in $\mathbb{K}$ ist sein eigenes Negatives, d.h. es gilt $c = -c \ \forall c \in \mathbb{K}$. $\Rightarrow c + c = 0 \ \forall c \in \mathbb{K}$.

Es gilt $1 + a \in \{0, 1, a, b\}$. Ang. $1 + a = 0 \Rightarrow 1 = -a = a$ ↯

Ang. $1 + a = 1$. $\Rightarrow (-1) + 1 + a = (-1) + 1 \Rightarrow a = 0$ ↯

Ang. $1 + a = a \Rightarrow 1 + a + (-a) = a + (-a) \Rightarrow 1 = 0$ ↯

Als einzige Möglichkeit bleibt $1 + a = b$. Auf Grund der Kommutativität gilt $a + 1 = b$.

Es gilt $1 + b = 1 + (a + 1) = a + 1 + 1 = a + 1 + (-1) = a + 0 = a$.

Kommutativität $\Rightarrow b + 1 = a$

$a + b = a + a + 1 = a + (-a) + 1 = 0 + 1 = 1$

Kommutativität $\Rightarrow b + a = 1$

Lt. Vl. gilt $0 \cdot c = 0 \quad \forall c \in \mathbb{K}$ und $1 \cdot c = c \quad \forall c \in \mathbb{K}$.

Kommutativität $\Rightarrow$ $c \cdot 0 = 0$, $c \cdot 1 = c \quad \forall c \in \mathbb{K}$

Ang. $a \cdot b = 0$. Da $\mathbb{K}$ ein Körper ist, würde daraus $a = 0$ oder $b = 0$ folgen. (Prop. (5.2)(iv)) $\lightning$ da $a \neq 0$ und $b \neq 0$

Ang. $a \cdot b = a$. Da $a \neq 0$, existiert der Kehrwert a^{-1}.

$\Rightarrow a^{-1} \cdot a \cdot b = a \cdot a^{-1} \Rightarrow 1 \cdot b = 1 \Rightarrow b = 1 \lightning$

Ang. $a \cdot b = b$. Da $b \neq 0$, existiert der Kehrwert b^{-1}.

$\Rightarrow a \cdot b \cdot b^{-1} = b \cdot b^{-1} \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \Rightarrow a = 1 \lightning$

Also ist $a \cdot b = 1$ die einzige verbleibende Möglichkeit.

Kommutativität $\Rightarrow b \cdot a = 1$

$b \cdot b = (a+1) \cdot b = a \cdot b + b = 1 + b = 1 + 1 + a$

$= 1 + (-1) + a = 0 + a = a$

$a \cdot a = (b+1) \cdot a = b \cdot a + a = 1 + a = b$

<u>zu (d)</u> Def.: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $n_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}$, definiert durch die Rekursionsvorschrift $(n+1)_{\mathbb{K}} = n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

$(\Rightarrow 2_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$, $3_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$, ...

hier: $0_{\mathbb{K}} = 0$, $1_{\mathbb{K}} = 1$, $2_{\mathbb{K}} = 1 + 1 = 0$, $3_{\mathbb{K}} = 2_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}}$

$= 0 + 1 = 1$, $4_{\mathbb{K}} = 3_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} = 1 + 1 = 0$)

<u>Beh.:</u> Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$(*) \quad n_{\mathbb{K}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 1 & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Dies zeigt, dass $\{ n_{\mathbb{K}} \mid n \in \mathbb{N} \} = \{0, 1\}$, also eine echte Teilmenge von $\mathbb{K}$, ist.

Bew. der Beh. durch vollst. Ind.:

Ind.-Anf.: Wegen $1_{\mathbb{K}} = 1$ ist die Aussage für $n=1$ erfüllt.
(1 ist ungerade, d.h. auf der rechten Seite von (*) steht 1)

Ind.-Schritt: Sei $n \in \mathbb{N}$, setze (*) für n voraus.

1. Fall: n gerade Ind.-V. (*) $\Rightarrow n_{\mathbb{K}} = 0 \Rightarrow (n+1)_{\mathbb{K}} = n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} = 0 + 1 = 1$ Die Gl. ist also für $n+1$ erfüllt, denn $n+1$ ist ungerade.

2. Fall: n ungerade Ind.-V. (*) $\Rightarrow n_{\mathbb{K}} = 1 \Rightarrow (n+1)_{\mathbb{K}} = n_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} = 1 + 1 = 0$ Die Gl. ist also für $n+1$ erfüllt, denn $n+1$ ist gerade. $\square$

<u>Aufgabe 2</u> $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ angeordneter Körper

<u>zu (a)</u> $\forall a \in \mathbb{K} \; \exists b, c \in \mathbb{K} : b < a < c$ wahr

Bew.: Sei $a \in \mathbb{K}$. z.zg.: $\exists b, c \in \mathbb{K}$ mit $b < a$ und $a < c$

Sei $c = a + 1_{\mathbb{K}}$. Lt. Vl. $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}}$. $\Rightarrow a + 0_{\mathbb{K}} < a + 1_{\mathbb{K}} \Rightarrow a < c$.

Sei $b = a - 1_{\mathbb{K}}$. $0_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}} \Rightarrow 0_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}} < 1_{\mathbb{K}} - 1_{\mathbb{K}} \Rightarrow -1_{\mathbb{K}} < 0_{\mathbb{K}}$
$\Rightarrow a - 1_{\mathbb{K}} < a + 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow b < a$. Damit ist Existenz von Elementen b, c mit $b < a$ und $a < c$ nachgewiesen.

zu (b) $\exists\, a, b, c \in \mathbb{K} : a < b < c < a$ falsch

Ang., es gibt Elemente $a, b, c \in \mathbb{K}$ mit $a < b$ und $b < c$ und $c < a$.

Nach Def. des „<"-Zeichens ist $a < b$ gleichbed. mit $b - a \in \mathbb{K}^+$.

ebenso: $b < c \Rightarrow c - b \in \mathbb{K}^+$, $c < a \Rightarrow a - c \in \mathbb{K}^+$

$b - a \in \mathbb{K}^+$, $c - b \in \mathbb{K}^+ \Rightarrow c - a = (c - b) + (b - a) \in \mathbb{K}^+$

$c - a \in \mathbb{K}^+$, $a - c \in \mathbb{K}^+ \Rightarrow 0_{\mathbb{K}} = a - a = (a - c) + (c - a) \in \mathbb{K}^+$

Nach Def. der angeordneten Körper gilt aber stets $0_{\mathbb{K}} \notin \mathbb{K}^+$.

zu (c) $\forall\, a, b \in \mathbb{K}\ \exists\, c \in \mathbb{K} : (a = 0_{\mathbb{K}}) \vee (ac = b)$ wahr

Bew.: Seien $a, b \in \mathbb{K}$ vorgegeben. z.zg.: $\exists\, c \in \mathbb{K}$ mit

$(a = 0_{\mathbb{K}}) \vee (ac = b)$

1. Fall: $a = 0_{\mathbb{K}}$ Dann ist $(a = 0_{\mathbb{K}}) \vee (ac = b)$ für beliebig gewähltes $c \in \mathbb{K}$ erfüllt, z. B. für $c = 0_{\mathbb{K}}$.

2. Fall: $a \neq 0_{\mathbb{K}}$ Dann existiert der Kehrwert a^{-1}. Setzen wir $c = a^{-1} b$, dann gilt $ac = a(a^{-1} b) = 1_{\mathbb{K}}\, b = b$.

Somit ist auch $(a = 0_{\mathbb{K}}) \vee (ac = b)$ erfüllt.

In beiden Fällen ist $\exists\, c \in \mathbb{K} : (a = 0_{\mathbb{K}}) \vee (ac = b)$ also erfüllt.

zu (d) $\exists a \in \mathbb{K} : \forall b \in \mathbb{K} : \exists c \in \mathbb{K} : (a < b < c) \vee (c < b \leq a)$ wahr

Es genügt z.zg., dass $\forall b \in \mathbb{K} : \exists c \in \mathbb{K} : (a < b < c) \vee (c < b \leq a)$

für $a = 0_{\mathbb{K}}$ erfüllt ist. Zeige also

$$\forall b \in \mathbb{K} : \exists c \in \mathbb{K} : (0_{\mathbb{K}} \leq b < c) \vee (c < b \leq 0_{\mathbb{K}})$$

Sei $b \in \mathbb{K}$ vorgeg. z.zg.: $\exists c \in \mathbb{K} : (0_{\mathbb{K}} \leq b < c) \vee (c < b \leq 0_{\mathbb{K}})$

1. Fall: $b > 0_{\mathbb{K}}$

Setzen wir $c = b + 1_{\mathbb{K}}$, dann gilt $b < c$ (s.o.), insgesamt

also $0_{\mathbb{K}} < b < c$. Damit ist auch $(0_{\mathbb{K}} < b < c) \vee (c < b \leq 0_{\mathbb{K}})$ erfüllt.

2. Fall: $b \leq 0_{\mathbb{K}}$

Setzen wir $c = b - 1_{\mathbb{K}}$, dann gilt $c < b$ (s.o.), insgesamt

also $c < b \leq 0_{\mathbb{K}}$. Damit ist auch $(0_{\mathbb{K}} \leq b < c) \vee (c < b \leq 0_{\mathbb{K}})$ erfüllt.

Damit ist gezeigt, dass $\exists c \in \mathbb{K} : (0_{\mathbb{K}} \leq b < c) \vee (c < b \leq 0_{\mathbb{K}})$

in jedem Fall gültig ist.

Aufgabe 3 $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ angeordneter Körper, $a, b, c, d \in \mathbb{K}$

zu (a) Voraussetzung: $a < b$, $c < d$ und $c, d \in \,]a, b[$

z.zg.: $[a, b] \setminus [c, d] = [a, c[\, \cup \,]d, b]$

„$\subseteq$" Sei $x \in [a, b] \setminus [c, d]$. $x \in [a, b] \Rightarrow a \leq x \leq b$

$x \notin [c, d] \Rightarrow x < c$ oder $x > d$

1. Fall: $x < c$ $\quad a \leq x$ und $x < c \Rightarrow x \in [a, c[\Rightarrow x \in [a, c[\, \cup \,]d, b]$

2. Fall: $x > d$ $\quad d < x$ und $x \leq b \Rightarrow x \in \,]d,b] \Rightarrow x \in [a,c[\, \cup \,]d,b]$

Also ist $x \in [a,c[\, \cup \,]d,b]$ in jedem Fall erfüllt.

„$\supseteq$" Sei $x \in [a,c[\, \cup \,]d,b]$. $\Rightarrow x \in [a,c[$ oder $x \in \,]d,b]$

außerdem: $c, d \in \,]a,b[\Rightarrow a < c, d < b$

1. Fall: $x \in [a,c[\Rightarrow a \leq x < c \overset{c<b}{\Rightarrow} a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a,b]$

$x < c \Rightarrow x \notin [c,d]$

$x \in [a,b]$ und $x \notin [c,d] \Rightarrow x \in [a,b] \setminus [c,d]$

2. Fall: $x \in \,]d,b] \Rightarrow d < x \leq b \overset{d>a}{\Rightarrow} a \leq x \leq b \Rightarrow x \in [a,b]$

$x > d \Rightarrow x \notin [c,d]$

$x \in [a,b]$ und $x \notin [c,d] \Rightarrow x \in [a,b] \setminus [c,d]$

Also gilt $x \in [a,b] \setminus [c,d]$ in jedem Fall.

zu (b) Voraussetzung: $a, b \in \mathbb{K}_+$ $\quad$ z.zg.: $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$

$a \geq 0$ und $b > a \Rightarrow b > 0 \Rightarrow b \in \mathbb{K}^+ \Rightarrow a + b \in \mathbb{K}^+$

„$\Rightarrow$" $a < b \Rightarrow b - a \in \mathbb{K}^+$

$b - a, b + a \in \mathbb{K}^+ \Rightarrow b^2 - a^2 = (b-a)(b+a) \in \mathbb{K}^+ \Rightarrow a^2 < b^2$

„$\Leftarrow$" $a^2 < b^2 \Rightarrow b^2 - a^2 \in \mathbb{K}^+$ $\quad a + b \in \mathbb{K}^+ \Rightarrow (a+b)^{-1} \in \mathbb{K}^+$

$b^2 - a^2, a + b \in \mathbb{K}^+ \Rightarrow b - a = (a+b)^{-1}(b^2 - a^2) \in \mathbb{K}^+ \Rightarrow a < b$

zu (c) Voraussetzung: $b \in \mathbb{K}^+$

z.zg.: $\{x \in \mathbb{K} \mid (x-a)^2 < b^2\} \overset{(*)}{=} \,]a-b, a+b[$

Sei $S \subseteq \mathbb{K}$ die Menge auf der linken Seite von (*).

„$\subseteq$" Sei $x \in S$. Es gilt $x - a = 0_{\mathbb{K}}$ oder $x - a \in \mathbb{K}^+$ oder $a - x \in \mathbb{K}^+$, also $x - a \in \mathbb{K}_+$ oder $a - x \in \mathbb{K}_+$.

__1. Fall:__ $x - a \in \mathbb{K}_+$ $x - a \in \mathbb{K}_+$, $(x-a)^2 < b^2 \overset{(b)}{\Rightarrow} x - a < b \Rightarrow x < a + b$

$b > 0_{\mathbb{K}} \Rightarrow -b < 0_{\mathbb{K}}$; $-b < 0_{\mathbb{K}}$, $0_{\mathbb{K}} \leq x - a \Rightarrow -b < x - a \Rightarrow a - b < x$

$a - b < x < a + b \Rightarrow x \in]a-b, a+b[$

__2. Fall:__ $a - x \in \mathbb{K}_+$ $a - x \in \mathbb{K}_+$, $(a-x)^2 = ((-1_{\mathbb{K}})(x-a))^2 =$

$(-1_{\mathbb{K}})^2 (x-a)^2 = (x-a)^2 < b^2 \overset{(b)}{\Rightarrow} a - x < b \Rightarrow a - b < x$

$-b < 0_{\mathbb{K}}$, $0_{\mathbb{K}} \leq a - x \Rightarrow -b < a - x \Rightarrow (-1_{\mathbb{K}})(-b) > (-1_{\mathbb{K}})(a-x)$

$\Rightarrow b > x - a \Rightarrow a + b > x$

$a - b < x < a + b \Rightarrow x \in]a-b, a+b[$

Also ist $x \in]a-b, a+b[$ in jedem Fall erfüllt.

„$\supseteq$" Sei $x \in]a-b, a+b[$. $\Rightarrow a - b < x < a + b \Rightarrow -b < x - a < b$

__1. Fall:__ $x - a \in \mathbb{R}_+$ $x - a < b \overset{(b)}{\Rightarrow} (x-a)^2 < b^2 \Rightarrow x \in S$

__2. Fall:__ $a - x \in \mathbb{R}_+$ $x - a > -b \Rightarrow a - x < b \overset{(b)}{\Rightarrow} (a-x)^2 < b^2 \Rightarrow$

$(x-a)^2 = ((-1_{\mathbb{K}})(a-x))^2 = (-1_{\mathbb{K}})^2 (a-x)^2 = (a-x)^2 < b^2 \Rightarrow x \in S$

Also ist $x \in S$ in jedem Fall erfüllt.