Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 3 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

Als erstes zeigen wir, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ unendlich ist und betrachten dazu die Abbildung $\psi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$, $n \mapsto \{n\}$. Diese Abbildung ist injektiv, denn sind $m, n \in \mathbb{N}$ vorgegeben mit $\psi(m) = \psi(n)$, dann folgt $\{m\} = \{n\}$ und $m = n$. Aufgefasst als Abbildung $\mathbb{N} \to \psi(\mathbb{N})$ ist ψ auch surjektiv, denn jedes Element $A \in \psi(N)$ hat nach Definition die Form $\psi(n) = \{n\}$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Wäre $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ endlich, dann würde dasselbe nach Satz (4.7)(ii) für die Teilmenge $\psi(\mathbb{N}) \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ und auf Grund der Bijektion auch für $\mathbb{N}$ gelten. Aber als abzählbar unendliche Menge ist $\mathbb{N}$ nach Proposition (4.13) insbesondere unendlich.

Nehmen wir nun an, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nicht überabzählbar ist. Dann muss $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ abzählbar unendlich sein, es existiert also eine bijektive Abbildung $\phi : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Sei nun

$$D \quad = \quad \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \phi(n)\}$$

wie im Hinweis angegeben. Auf Grund der Bijektivität gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\phi(n_0) = D$. Offenbar muss $n_0 \in \phi(n_0)$ oder $n_0 \notin \phi(n_0)$ gelten. Betrachten wir zunächst den Fall $n_0 \in \phi(n_0)$. Dann ist die definierende Bedingung $n \notin \phi(n)$ für $n = n_0$ nicht erfüllt. Nach Definition von D ist n_0 also kein Element von D. Dies widerspricht unserer Annahme.

Betrachten wir nun den Fall $n_0 \notin \phi(n_0)$. Dann ist die Bedinung $n \notin \phi(n)$ für $n = n_0$ erfüllt, und demzufolge muss $n_0 \in \phi(n_0)$ gelten. Auch hier geraten wir also in einen Widerspruch. Insgesamt hat also die Annahme, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ wäre nicht überabzählbar, zu einem Widerspruch geführt. Daraus folgt, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar sein muss.

Aufgabe 2

zu (a) Sei $A \subseteq X$. Wir beweisen die Gleichung $(g \circ f)(A) = g(f(A))$. „$\subseteq$“ Sei $c \in (g \circ f)(A)$ vorgegeben. Zu zeigen ist $c \in g(f(A))$. Nach Definition der Bildmenge $(g \circ f)(A)$ existiert ein $a \in A$ mit $c = (g \circ f)(a) = g(f(a))$. Setzen wir $b = f(a)$, dann gilt $c = g(b)$. Nach Definition der Bildmenge $f(A)$ gilt $b \in f(A)$ und somit $c = g(b) \in g(f(A))$. „$\supseteq$“ Sei $c \in g(f(A))$ vorgegeben. Zu zeigen ist $c \in (g \circ f)(A)$. Wegen $c \in g(f(A))$ existiert ein $b \in f(A)$ mit $c = g(b)$. Wegen $b \in f(A)$ gibt es ein $a \in A$ mit $b = f(a)$. Insgesamt erhalten wir $c = g(b) = g(f(a)) = (g \circ f)(a)$. Wegen $a \in A$ folgt daraus $c \in (g \circ f)(a)$.

Sei $C \subseteq Z$. Wir beweisen die Gleichung $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. „$\subseteq$“ Sei $a \in (g \circ f)^{-1}(C)$. vorgegeben. Zu zeigen ist $a \in f^{-1}(g^{-1}(C))$. Aus der Voraussetzung folgt $(g \circ f)(a) \in C$, denn nach Definition der Urbildmenge besteht $(g \circ f)^{-1}(C)$ aus allen Elementen, die von $g \circ f$ nach C abgebildet werden. Aus $g(f(a)) = (g \circ f)(a) \in C$ folgt $f(a) \in g^{-1}(C)$. Daraus wiederum folgt $f^{-1}(g^{-1}(C))$. „$\supseteq$“ Sei $a \in f^{-1}(g^{-1}(C))$ vorgegeben. Zu zeigen ist $(g \circ f)^{-1}(C)$. Auf Grund der Voraussetzung gilt $f(a) \in g^{-1}(C)$, und daraus wiederum folgt $g(f(a)) \in C$, also $(g \circ f)(a) \in C$. Das Element a wird also von $g \circ f$ nach C abgebildet, folglich gilt $a \in (g \circ f)^{-1}(C)$.

zu (b) Wir zeigen, dass die Gleichung $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für beliebig vorgegebene Teilmengen $A, B \subseteq X$ gültig ist. „$\subseteq$" Sei $c \in f(A \cup B)$. Dann gibt es ein $a \in A \cup B$ mit $f(a) = c$. Aus $a \in A \cup B$ folgt $a \in A$ oder $a \in B$. Betrachten wir zunächst den Fall $a \in A$. Dann gilt $c = f(a) \in f(A)$, wegen $f(A) \subseteq f(A) \cup f(B)$ also auch $c \in f(A) \cup f(B)$. Betrachten wir nun den Fall $a \in B$. Dann gilt $c = f(a) \in f(B)$, und wegen $f(B) \subseteq f(A) \cup f(B)$ erhalten wir wiederum $c \in f(A) \cup f(B)$.

„$\supseteq$" Sei $c \in f(A) \cup f(B)$ vorgegeben. Dann gilt $c \in f(A)$ oder $c \in f(B)$. Betrachten wir zunächst den Fall $c \in f(A)$. Dann gibt es ein $a \in A$ mit $f(a) = c$. Wegen $A \subseteq A \cup B$ liegt a auch in $A \cup B$. Daraus folgt $c = f(a) \in f(A \cup B)$. Betrachten wir nun den Fall $c \in f(B)$. Dann gibt es ein $b \in B$ mit $f(b) = c$. Wegen $B \subseteq A \cup B$ liegt b auch in $A \cup B$. Daraus folgt wiederum $c = f(b) \in f(A \cup B)$.

zu (c) Setzen wir voraus, dass f injektiv ist, und beweisen wir die Gleichung $f^{-1}(f(A)) = A$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die Inklusion „$\supseteq$" sogar für beliebige Abbildungen erfüllt ist. Zum Beweis von „$\subseteq$" sei $c \in f^{-1}(f(A))$ vorgegeben. Nach Definition der Urbildmenge gilt $f(c) \in f(A)$. Es gibt also ein $a \in A$ mit $f(c) = f(a)$. Aus der Injektivität von f folgt $c = a$. Somit ist c in A enthalten.

Setzen wir nun voraus, dass f surjektiv ist, und beweisen wir die Gleichung $f(f^{-1}(B)) = B$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass „$\subseteq$" sogar für beliebige Abbildungen f gültig ist. Zum Beweis von „$\supseteq$" sei $b \in B$ vorgegeben. Da f surjektiv ist, gibt es ein $x \in X$ mit $f(x) = b$. Wegen $f(x) = b \in B$ gilt $x \in f^{-1}(B)$. Daraus folgt $f(x) \in f(f^{-1}(B))$, also $b \in f(f^{-1}(B))$.

Aufgabe 3

zu (a) Zunächst beweisen wir die Implikation „f injektiv $\Rightarrow$ f surjektiv". Sei $f : X \to Y$ also eine injektive Abbildung, und sei $n = |X| = |Y|$. Laut Vorlesung bedeutet $n = |X|$, dass eine bijektive Abbildung $\varphi : M_n \to X$ existiert. Wegen $n = |Y|$ existiert auch eine bijektive Abbildung $\psi : M_n \to Y$. Weil laut Vorlesung die Komposition injektiver Abbildung wiederum injektiv ist, ist durch $\tilde{f} = \psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ eine injektive Abbildung $M_n \to M_n$ definiert. Nun ist nach (2.14) jede injektive Abbildung $M_n \to M_n$ auch surjektiv. Also ist $\tilde{f}$ und somit auch die Abbildung $\psi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1}$ surjektiv. Außerdem gilt

$$\psi \circ \tilde{f} \circ \varphi^{-1} \quad = \quad \psi \circ (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} \quad = \quad (\psi \circ \psi^{-1}) \circ f \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}) \quad = \quad \mathrm{id}_Y \circ f \circ \mathrm{id}_X \quad = \quad f.$$

Damit ist die Surjektivität von f bewiesen.

Bevor wir die Umkehrung der Implikation beweisen, bemerken wir zunächst, dass jede surjektive Abbildung $\tilde{f} : M_n \to M_n$ auch injektiv ist. Denn nach (2.10) exstiert eine Abbildung $\tilde{g} : M_n \to M_n$ mit $\tilde{f} \circ \tilde{g} = \mathrm{id}_{M_n}$. Wiederum nach (2.10) ist die Abbildung $\tilde{g}$ injektiv. Aus (2.14) folgt, dass $\tilde{g}$ auch surjektiv ist. Nach (2.10) existiert also eine Abbildung $\tilde{h} : M_n \to M_n$ mit $\tilde{h} \circ \tilde{g} = \mathrm{id}_{M_n}$, und diese Abbildung ist injektiv. Wie im Beweis von (2.10) erhalten wir

$$\tilde{h} \quad = \quad \mathrm{id}_{M_n} \circ \tilde{h} \quad = \quad (\tilde{f} \circ \tilde{g}) \quad = \quad (\tilde{h} \circ \tilde{g}) \circ \tilde{f} \quad = \quad \mathrm{id}_{M_n} \circ \tilde{f} \quad = \quad \tilde{f}.$$

Damit ist die Injektivität von $\tilde{f}$ bewiesen.

Nun können wir die Implikation „f surjektiv $\Rightarrow$ f injektiv" nach demselben Schema wie zuvor die umgekehrte Implikation beweisen. Sei $f : X \to Y$ surjektiv. Wegen $n = |X| = |Y|$ gibt es Bijektionen $\varphi : M_n \to X$ und $\psi : M_n \to Y$. Als Komposition surjektiver Abbildungen ist auch $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ surjektiv, und wie im vorherigen Absatz gezeigt, ist $\tilde{f}$ als surjektive Abbildung $M_n \to M_n$ auch injektiv. Aber daraus folgt wiederum, dass $f = \psi^{-1} \circ \tilde{f} \circ \varphi$ injektiv ist.

Die zweite Äquivalenz „f surjektiv $\Leftrightarrow$ f bijektiv“ folgt nun direkt aus der ersten. Ist f surjektiv, dann auf Grund der ersten Äquivalez auch injektiv und damit insgesamt bijektiv. Die umgekehrte Implikation ist ohnehin erfüllt, da jede bijektive Abbildung insbesondere surjektiv ist.

zu (b) Wir betrachten die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n+1$. Diese Abbildung ist injektiv. Sind nämlich $m, n \in \mathbb{N}$ mit $f(m) = f(n)$ vorgegeben, dann folgt $m+1 = n+1$ und somit auch $m = n$. Die Abbildung ist aber nicht surjektiv, denn es gibt kein $n \in \mathbb{N}$ mit $f(n) = 1$. Wäre $n \in \mathbb{N}$ ein Element mit dieser Eigenschaft, dann würden wir $n+1 = 1$ und somit $n = 0$ erhalten, im Widerspruch zu $0 \notin \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass die Äquivalenz „f injektiv $\Leftrightarrow$ f surjektiv“ für Abbildungen f zwischen gleichmächtigen unendlichen Mengen im Allgemeinen falsch ist.

Für die zweite Äquivalenz betrachten wir die Abbildung $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gegeben durch $g(1) = 1$ und $g(n) = n - 1$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Diese Abbildung ist surjektiv. Ist nämlich $n \in \mathbb{N}$ vorgegeben, dann gilt $g(n) = n$ im Fall $n = 1$ und $g(n+1) = n$ im Fall $n \geq 1$. Andererseits ist die Abbildung nicht bijektiv, da sie noch nicht einmal injektiv ist: Es gilt $g(1) = g(2)$, obwohl $1 \neq 2$ ist.