Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 12 —

(Wiederholungsaufgaben)

Aufgabe 1

Für die Menge A gilt $\max(A) = 2$. Denn einerseits ist $2 = 1 + \frac{1}{1}$ in A enthalten, andererseits ist 2 wegen $2 = 1 + \frac{1}{1} \geq 1 + \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auch eine obere Schranke von A. Existiert das Maximum einer Menge, dann stimmt das Supremum mit dem Maximum überein. Es gilt also $\sup(A) = \max(A) = 2$. Weiter gilt $\inf(A) = 1$. Denn wegen $1 + \frac{1}{n} \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist 1 eine untere Schranke von A, und für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert ein Element $x \in A$ mit $x < 1 + \varepsilon$. Da nämlich $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ unbeschränkt ist, existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \varepsilon^{-1}$, und $x = 1 + \frac{1}{n}$ ist dann wegen $\frac{1}{n} < \varepsilon$ ein Element aus A mit $x = 1 + \frac{1}{n} < 1 + \varepsilon$. Die Menge A besitzt aber kein Minimum. Denn andernfalls müsste $\min(A) = \inf(A) = 1$ gelten, insbesondere wäre 1 ein Element der Menge A. Aber dann wäre $1 = 1 + \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ und damit $\frac{1}{n} = 0$, im Widerspruch zu $\frac{1}{n} > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen, dass $\inf(B) = 1$ und $\sup(B) = e$ gilt. Jedes Element $y \in B$ hat die Form $y = \exp(x)$ für ein $x \in \mathbb{Q}$ mit $0 < x < 1$. Aus $0 < x$ folgt $1 = \exp(0) < \exp(x) = y$, weil die Funktion exp laut Vorlesung streng monoton wachsend ist. Dies zeigt, dass 1 eine untere Schranke von B ist. Aus $x < 1$ folgt ebenso $y = \exp(x) < \exp(1) = e$. Dies zeigt, dass e eine obere Schranke von B ist.

Ist $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon < 1$ vorgegeben, so gilt $\ln(1 + \varepsilon) > \ln(1) = 0$, weil auch der natürliche Logarithmus laut Vorlesung streng monoton wachsend ist. Weil die rationalen Zahlen dicht in $\mathbb{R}$ liegen, existiert ein $x_1 \in \mathbb{Q}$ mit $0 < x_1 < \ln(1 + \varepsilon) < \ln(1 + 1) < \ln(e) = 1$. Somit ist $y_1 = \exp(x_1)$ ein Element der Menge B, und es gilt $y_1 = \exp(x_1) < \exp(\ln(1 + \varepsilon)) = 1 + \varepsilon$. Damit ist nachgewiesen, dass 1 tatsächlich das Infimum von B ist. Ebenso gilt $\ln(e - \varepsilon) < \ln(e) = 1$, und es existiert ein $x_2 \in \mathbb{Q}$ mit $1 > x_2 > \ln(e - \varepsilon) > \ln(e - 1) > \ln(1) = 0$. Somit ist $y_2 = \exp(x_2)$ ebenfalls ein Element der Menge B, und es gilt $y_2 = \exp(x_2) > \exp(\ln(e - \varepsilon)) = e - \varepsilon$. Dies zeigt, dass e tatsächlich das Supremum von B ist.

Die Menge B besitzt aber kein Minimum. Denn anderfalls müsste $\min(B) = \inf(B) = 1$ gelten, und 1 wäre somit ein Element von B. Es gäbe dann ein $x_3 \in \,]0, 1[\, \cap \mathbb{Q}$ mit $\exp(x_3) = 1$. Aber aus $x_3 > 0$ folgt $\exp(x_3) > \exp(0) = 1$, im Widerspruch zur vorherigen Feststellung. Die Menge B besitzt auch kein Maximum. Denn anderfalls müsste $\max(B) = \sup(B) = e$ gelten, und e wäre somit ein Element von B. Es gäbe dann ein $x_4 \in \,]0, 1[\, \cap \mathbb{Q}$ mit $\exp(x_4) = e$. Aber aus $x_4 < 1$ folgt $\exp(x_4) < \exp(1) = e$, so dass wir erneut einen Widerspruch erhalten.

Aufgabe 2

zu (a) Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt die Äquivalenz

$$\frac{a_n}{a_n + 1} > 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a_n > (1 - \varepsilon)(a_n + 1) \quad \Leftrightarrow \quad a_n > a_n - \varepsilon a_n + 1 - \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \quad \varepsilon a_n > 1 - \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad a_n > \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon}.$$

Sei nun $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon < 1$ vorgegeben und $\kappa = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \in \mathbb{R}^+$. Wegen $\lim_n a_n = +\infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > \kappa$ für alle $n \geq N$. Wie die soeben durchgeführte Rechnung zeigt, folgt daraus $\frac{a_n}{a_n+1} > 1 - \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Ebenso gilt wegen $0 < a_n < a_n + 1$ auch $\frac{a_n}{a_n+1} < 1 < 1 + \varepsilon$, insgesamt also $|\frac{a_n}{a_n+1} - 1| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit ist $\lim_n \frac{a_n}{a_n+1} = 1$ nachgewiesen.

zu (b) Laut Vorlesung ist jede konvergente Folge beschränkt. Da die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ laut Angabe nicht nach oben beschränkt ist, ist sie insbesondere unbeschränkt und damit divergent. Nehmen wir nun an, dass $\lim_n b_n = +\infty$ gilt. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n > 1$ für alle $n \geq N$. Setzen wir $b = \min\{1, b_1, ..., b_{N-1}\}$, dann gilt also $b_n \geq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$, im Widerspruch zur Voraussetzung, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten unbeschränkt ist. Nehmen wir nun an, es gilt $\lim_n b_n = -\infty$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $b_n < -1$ für alle $n \geq N$. Definieren wir $b = \max\{-1, b_1, ..., b_{N-1}\}$, so erhalten wir $b_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber dies widerspricht der Voraussetzung, dass $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben unbeschränkt ist.

Aufgabe 3

zu (a) Wir zeigen, dass $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sin(x)}{x} = 0$ gilt. Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\lim_n x_n = +\infty$. Zu zeigen ist $\lim_n \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 0$. Sei dazu $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $\lim_n x_n = +\infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $x_n > \varepsilon^{-1}$ für alle $n \geq N$. Wegen $\sin(x_n) \in [-1, 1]$ für alle $n \geq N$ folgt $|\frac{\sin(x_n)}{x_n}| \leq |x_n|^{-1} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit ist $\lim_n \frac{\sin(x_n)}{x_n} = 0$ nachgewiesen.

zu (b) Nehmen wir zunächst an, der Funktionsgrenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\frac{1}{x})}{x}$ existiert als reelle Zahl c. Dann müsste für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_n x_n = 0$ jeweils $\lim_n \frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n} = c$ gelten, insbesondere wäre die Folge $(\frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Betrachten wir nun die konkrete Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_n = (2\pi n - \frac{1}{2}\pi)^{-1}$. Dann gilt $\lim_n x_n = 0$, denn für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ können wir $N \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $N > \varepsilon^{-1}$ gilt und erhalten dann jeweils $|x_n| = |2\pi n - \frac{1}{2}\pi|^{-1} \leq |\pi n|^{-1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Es gilt aber für alle $n \in \mathbb{N}$ auch

$$\frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n} \quad = \quad (2\pi n - \tfrac{1}{2}\pi)\sin(2\pi n - \tfrac{1}{2}\pi) \quad = \quad (2\pi n - \tfrac{1}{2}\pi)(-1) \quad = \quad \tfrac{1}{2}\pi - 2\pi n.$$

Dies zeigt, dass die $(\frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nicht beschränkt ist, denn ist $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \kappa$, dann folgt $\frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n} = \frac{1}{2}\pi - 2\pi n \geq -\pi n > n > \kappa$. Somit existiert der Funktionsgrenzwert nicht als reelle Zahl.

Wäre der Funktionsgrenzwert gleich $+\infty$, dann müsste auch für die angegebene Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Bedingung $\frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n} = +\infty$ gelten. Insbesondere wäre die Folge $(\frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten beschränkt. Denn wegen $\lim_n \frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n} = +\infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n} > 1$, und setzen wir $b = \max\{1, \frac{\sin(x_1^{-1})}{x_1}, ..., \frac{\sin(x_{N-1}^{-1})}{x_{N-1}}\}$, dann ist $\frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n} \geq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Aber unsere Rechnung im letzten Absatz hat ergeben, dass die Folge $(\frac{\sin(x_n^{-1})}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach unten unbeschränkt ist. Die Annahme, dass der Funktionsgrenzwert gleich $+\infty$ ist, hat also ebenfalls zu einem Widerspruch geführt.

Nehmen wir nun an, dass der Funktionsgrenzwert gleich $-\infty$ ist. Die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $y_n = (2\pi n)^{-1}$. Dann gilt $\lim_n y_n = 0$, denn für vorgegebenes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ können wir $N \in \mathbb{N}$ so wählen, dass $N > \varepsilon^{-1}$ gilt und erhalten dann jeweils $|y_n| = |2\pi n|^{-1} \leq |\pi n|^{-1} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Auf Grund der Annahme $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^{-1})}{x} = -\infty$ müsste also $\lim_n \frac{\sin(y_n^{-1})}{y_n} = -\infty$ gelten; insbesondere gäbe es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{\sin(y_n^{-1})}{y_n} < -1$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Tatsächlich aber gilt

$$\frac{\sin(y_n^{-1})}{y_n} \quad = \quad 2\pi n \cdot \sin(2\pi n) \quad = \quad 2\pi n \cdot 0 \quad = \quad 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Dies zeigt, dass auch $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^{-1})}{x} = -\infty$ nicht erfüllt ist.

zu (c) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die l'Hospitalsche Regel auch auf beidseitige Grenzwerte angewendet werden kann. Wegen $\sin'(x) = \cos(x)$ gilt somit

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} \quad = \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} \quad = \quad \frac{\cos(0)}{1} \quad = \quad \frac{1}{1} \quad = \quad 1.$$