Analysis einer Variablen

— Blatt 11 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0

zu (a) Die Ableitung von f im Punkt a ist definiert durch den Grenzwert

$$f'(a) \quad = \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Durch die Bedingung, dass a ein innerer Punkt von D ist, wird gewährleistet, dass a ein Berührpunkt von $D \setminus \{a\}$ ist. Dies wiederum ist eine notwendige Voraussetzung für die Existenz des Grenzwertes.

zu (b) Es muss gezeigt werden, dass der unter (a) angegebene Grenzwert als (endliche) reelle Zahl c existiert. Dafür muss gezeigt werden, dass für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_n x_n = a$ jeweils $\lim_n \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} = c$ gilt.

zu (c) Eine Möglichkeit besteht darin, eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$ mit $\lim_n x_n = a$ zu finden, für der Grenzwert $\lim_n \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a}$ gleich $+\infty$ oder $-\infty$ ist. Oder man findet verschiedene Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $D \setminus \{a\}$, die beide gegen a konvergieren, bei denen die Grenzwerte $\lim_n \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a}$ und $\lim_n \frac{f(y_n)-f(a)}{y_n - a}$ aber verschieden sind. Beides impliziert, dass der Grenzwert unter (a) in $\mathbb{R}$ nicht existiert.

Aufgabe 1

zu (a) Sei $a \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Dann gilt

$$f'(a) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h} \left((a+h)^3 - a^3\right) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h} \left(a^3 + 3a^2 h + 3ah^2 + h^3 - a^3\right) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h} \left(3a^2 h + 3ah^2 + h^3\right)$$

$$= \quad \lim_{h \to 0} \left(3a^2 + 3ah + h^2\right) \quad = \quad 3a^2 + 3a \cdot 0 + 0^2 \quad = \quad 3a^2.$$

zu (b) Auf Grund von Lemma (12.18) gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ jeweils $\sin(x) = x + r_1'(x)$, mit der Restgliedabschätzung $|r_1'(x)| \le \frac{1}{6}|x|^3$ für $|x| \le 4$. Daraus folgt

$$\lim_{h \to 0} \frac{r_1'(\frac{1}{2}h)}{h} = 0.$$

Ist nämlich $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_n h_n = 0$, dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|\frac{1}{2}h_n| \le 4$ für alle $n \ge N$. Wir erhalten

$$\left| \frac{r_1'(\frac{1}{2}h_n)}{h_n} \right| \quad \le \quad |h_n|^{-1} \cdot \tfrac{1}{6} |(\tfrac{1}{2}h_n)^3| \quad = \quad \tfrac{1}{48}|h_n|^2 \quad \text{für alle } n \ge N \ ,$$

und aus $\lim_n \frac{1}{48}|h_n|^2 = \frac{1}{48}|0|^2 = 0$ folgt $\lim_n |\frac{r_1'(\frac{1}{2}h_n)}{h_n}| = 0$, nach dem Sandwich-Lemma. Mit Lemma (12.19)(iii) erhalten wir nun

$$\lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h} \left(\sin(x+h) - \sin(x)\right) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h} \cdot 2\cos(x + \tfrac{1}{2}h)\sin(\tfrac{1}{2}h) \quad = \quad \lim_{h \to 0} \tfrac{1}{h} \cdot 2\cos(x + \tfrac{1}{2}h)(\tfrac{1}{2}h + r_1'(\tfrac{1}{2}h))$$

$$= \quad \lim_{h \to 0} 2\cos(x + \tfrac{1}{2}h) \left(\frac{1}{2} + \frac{r_1'(\frac{1}{2}h)}{h} \right) \quad = \quad 2\cos(x + \tfrac{1}{2} \cdot 0) \left(\tfrac{1}{2} + 0\right) \quad = \quad \cos(x)$$

und

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\left(\cos(x+h)-\cos(x)\right) \quad = \quad \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\cdot(-2)\sin(x+\tfrac{1}{2}h)\sin(\tfrac{1}{2}h) \quad =$$

$$\lim_{h\to 0} \tfrac{1}{h}\cdot(-2)\sin(x+\tfrac{1}{2}h)(\tfrac{1}{2}h+r_1'(\tfrac{1}{2}h)) \quad = \quad \lim_{h\to 0}(-2)\sin(x+\tfrac{1}{2}h)\left(\tfrac{1}{2}+\frac{r_1'(\tfrac{1}{2}h)}{h}\right) \quad =$$

$$(-2)\sin(x+\tfrac{1}{2}\cdot 0)\left(\tfrac{1}{2}+0\right) \quad = \quad -\sin(x).$$

Aufgabe 2

zu (a) Wäre f in 1 differenzierbar, dann müsste der Grenzwert $c = \lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ als (endliche) reelle Zahl existieren. Für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit $\lim_n x_n = 1$ müsste dann $\lim_n \frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1} = c$ gelten. Betrachten wir zunächst die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $x_n = 1+\frac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Es gilt $\lim_n x_n = 1+\lim_n \frac{1}{n} = 1+0 = 1$ und

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|(1+\frac{1}{n})-1|-0}{(1+\frac{1}{n})-1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 1 \quad = \quad 1.$$

Ist f in 1 differenzierbar, dann gilt also $c=1$. Betrachten wir nun die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $y_n = 1-\frac{1}{n}$ für alle $n\in\mathbb{N}$. Auch hier gilt $\lim_n y_n = 1-\lim_n\frac{1}{n} = 1-0 = 1$. Also müsste auch

$$c \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{f(y_n)-f(1)}{y_n-1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|(1-\frac{1}{n})-1|-0}{(1-\frac{1}{n})-1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{(-\frac{1}{n})} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} -1 \quad = \quad -1$$

gelten. Insgesamt wäre dann $1 = c = -1$, im Widerspruch zu $1\neq -1$. Dies zeigt, dass unsere Annahme, das f in 1 differenzierbar ist, falsch war.

zu (b) Sei $a\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass der Grenzwert $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{a\}$, die gegen a konvergiert. Zunächst betrachten wir den Fall $a<1$ und setzen $\varepsilon = 1-a$. Wegen $\lim_n x_n = a$ gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ mit $|x_n-a|<\varepsilon$ für alle $n\geq N$. Insbesondere gilt dann $x_n < a+\varepsilon = a+(1-a) = 1$ und somit $|x_n-1| = -(x_n-1) = 1-x_n$ für alle $n\geq N$. Weil endlich viele Folgenglieder sich auf den Grenzwert nicht auswirken, erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|x_n-1|-|a-1|}{x_n-a} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(1-x_n)+(a-1)}{x_n-a}$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty}\frac{a-x_n}{x_n-a} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} -1 \quad = \quad -1.$$

Also ist f im Punkt a differenzierbar, und es gilt $f'(a) = -1$. Nun betrachten wir den Fall $a>1$ und setzen $\varepsilon = a-1$. Wegen $\lim_n x_n = a$ gibt es auch hier ein $N\in\mathbb{N}$ mit $|x_n-a|<\varepsilon$ für alle $n\geq N$. Insbesondere gilt dann $x_n > a-\varepsilon = a-(a-1) = 1$ und somit $|x_n-1| = x_n-1$ für alle $n\geq N$. Wieder verwenden wir, dass endlich viele Folgenglieder keinen Einfluss auf den Grenzwert haben, und erhalten diesmal

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)-f(a)}{x_n-a} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{|x_n-1|-|a-1|}{x_n-a} \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\frac{(x_n-1)-(a-1)}{x_n-a}$$

$$= \quad \lim_{n\to\infty}\frac{x_n-a}{x_n-a} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} 1 \quad = \quad 1.$$

Also ist f auch in diesem Fall differenzierbar, und die Ableitung ist $f'(a) = 1$.

Aufgabe 3

„$\Rightarrow$“ Sei $a \in \mathbb{R}$ vorgegeben und $c \in \mathbb{R}$ der gemeinsame Wert der rechtsseitigen Ableitung von $g = f|_{[a,+\infty[}$ und der linksseitigen Ableitung von $h = f|_{]-\infty,a]}$. Zu zeigen ist

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad = \quad c.$$

Sei dazu $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ mit $\lim_n x_n = a$. Zu zeigen ist

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \quad = \quad c. \quad (\Delta)$$

Auf Grund des ε-δ-Kriteriums für Funktionsgrenzwerte, Satz (11.13), gibt es ein $\delta_1 \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$\left| \frac{g(x) - g(a)}{x - a} - c \right| \quad < \quad \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x > a$ und $|x - a| < \delta_1$ erfüllt ist. Ebenso existiert ein $\delta_2 \in \mathbb{R}^+$, so dass

$$\left| \frac{h(x) - h(a)}{x - a} - c \right| \quad < \quad \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x < a$ und $|x - a| < \delta_2$ erfüllt ist. Wegen $\lim_n x_n = a$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \min\{\delta_1, \delta_2\}$ für alle $n \geq N$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Ist $x_n > a$, dann erhalten wir wegen $|x_n - a| < \delta_1$ die Abschätzung

$$\left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} - c \right| \quad = \quad \left| \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} - c \right| \quad < \quad \varepsilon.$$

Ist $x_n < a$, dann erhalten wir wegen $|x_n - a| < \delta_2$ ebenso die Abschätzung

$$\left| \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} - c \right| \quad = \quad \left| \frac{h(x_n) - h(a)}{x - a} - c \right| \quad < \quad \varepsilon.$$

Insgesamt ist (Δ) damit nachgewiesen.

„$\Leftarrow$“ Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]a, +\infty[$ mit $\lim_n x_n = a$. Auf Grund der Differenzierbarkeit von f im Punkt a gilt dann

$$\lim_{n \to \infty} \frac{g(x_n) - g(a)}{x_n - a} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \quad = \quad f'(a).$$

Also ist f in a rechtsseitig differenzierbar, und $f'(a)$ ist der Wert der rechtsseitigen Ableitung. Nun sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $]-\infty, a[$ mit $\lim_n x_n = a$. Dann erhalten wir ebenso

$$\lim_{n \to \infty} \frac{h(x_n) - h(a)}{x_n - a} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} \quad = \quad f'(a).$$

Also ist f in a auch linksseitig differenzierbar, und $f'(a)$ ist auch der Wert der linksseitigen Ableitung.