Lösung Globalübungsblatt 11

Aufgabe 1

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} -x^2 & \text{falls } x < 0 \\ x^3 & \text{falls } x \geq 0 \end{cases}$$

zu (a) z.zg.: f ist auf ganz $\mathbb{R}$ diff'bar

Sei $a \in \mathbb{R}$. z.zg.: Der Grenzwert $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existiert.

1. Fall: $a < 0$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Sei $\varepsilon = -a \in \mathbb{R}^+$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \;\forall\, n \geq N$. Insb. gilt also $x_n < a + \varepsilon = a + (-a) = 0$

und $f(x_n) = -x_n^2 \;\forall\, n \geq N$. $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-x_n^2)-(-a^2)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} -\frac{a^2 - x_n^2}{a - x_n} =$$

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{\cancel{(a-x_n)}(a+x_n)}{\cancel{a-x_n}} = \lim_{n\to\infty} -(a+x_n) = -(a+a) = -2a$$

Somit ist f in a diff'bar, und es gilt $f'(a) = -2a$.

2. Fall: $a > 0$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{a\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

Sei $\varepsilon = a \in \mathbb{R}^+$. Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$a-\varepsilon < x_n < a+\varepsilon \ \forall n \geq N$. Insb. gilt also $x_n > a-\varepsilon = a - a = 0$

und $f(x_n) = x_n^3 \ \forall n \geq N$. $\Rightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(a)}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^3 - a^3}{x_n - a} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(x_n-a)}(x_n^2 + x_n a + a^2)}{\cancel{x_n - a}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + x_n a + a^2) = a^2 + a\cdot a + a^2 = 3a^2$$

Somit ist f in a diff'bar, und es gilt $f'(a) = 3a^2$.

<u>3. Fall:</u> $a = 0$

Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ist $x_n < 0$, dann gilt $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0} = \frac{-x_n^2 - 0}{x_n - 0} = -x_n$.

Ist $x_n > 0$, dann gilt $\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0} = \frac{x_n^3 - 0}{x_n - 0} = x_n^2$.

Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < 1 \ \forall n \geq N$.

Für diese n gilt dann $|-x_n| = |x_n|$, $|x_n^2| = |x_n|^2 < |x_n|$.

$|x_n|^2 = |x_n|\cdot|x_n| < |x_n|\cdot 1 = |x_n|$

Somit gilt $$0 \leq \left|\frac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0}\right| \leq |x_n| \quad \forall n \geq N.$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |0| = 0$ folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)-f(0)}{x_n - 0} = 0$,

nach dem Sandwich-Lemma. Die Fkt. f ist also in 0

diff'bar, und es gilt $f'(0) = 0$.

<u>zu (b)</u> Nach Teil (a) ist $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ geg. durch

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & \text{falls } x < 0 \\ 3x^2 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

zu zeigen: (i) f' ist stetig in 0

(ii) f' ist nicht diff'bar in 0

<u>zu (i)</u> Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

z.zg.: $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(0)$, also $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$

Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg., o.B.d.A. sei $\varepsilon < 1$.

Wegen $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \frac{1}{3}\varepsilon$ $\forall n \geq N$.

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$. Ist $x_n < 0$, dann gilt $|f'(x_n)| =$
$|-2x_n| = 2|x_n| < \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$. Ist $x_n \geq 0$, dann gilt
$|f'(x_n)| = |3x_n^2| = 3|x_n|^2 \underset{|x_n|<1}{\leq} 3|x_n| < 3 \cdot \frac{1}{3}\varepsilon = \varepsilon$.

Damit ist $\lim_{n\to\infty} f'(x_n) = 0$ nachgewiesen.

<u>zu (ii)</u> Ang., f' ist in 0 diff'bar. Dann existiert der Funktionsgrenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0}.$$

Ist der Grenzwert gleich $c \in \mathbb{R}$, dann gilt für <u>jede</u> $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ also

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f'(x_n) - f'(0)}{x_n - 0} = c.$$

Da $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ liegt und gegen 0 konvergiert,

gilt also insbesondere $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(\frac{1}{n}) - f'(0)}{\frac{1}{n} - 0} = c.$

$$\Rightarrow \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(\frac{1}{n}) - f'(0)}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\cdot(\frac{1}{n})^2 - 0}{\frac{1}{n} - 0} = \lim_{n\to\infty} 3\cdot\frac{1}{n} = 3\cdot 0 = 0.$$

$\Rightarrow \quad c = 0$

Da auch $(-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ liegt und gegen 0 konvergiert,

gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f'(-\frac{1}{n}) - f'(0)}{(-\frac{1}{n}) - 0} = c.$

$$\Rightarrow \quad c = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(-\frac{1}{n}) - f'(0)}{(-\frac{1}{n}) - 0} = \lim_{n\to\infty} \frac{(-2\cdot(-\frac{1}{n})) - 0}{(-\frac{1}{n}) - 0} = \lim_{n\to\infty} (-2) = -2$$

$\Rightarrow \quad c = -2$ insgesamt: $0 = c = -2$ $\lightning$

Also existiert der Funktionsgrenzwert nicht. $\square$

Aufgabe 2

zu (a) (i) $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \ln(\ln(x^2+x+1))$

Definiere $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ x \mapsto x^2+x+1, \quad h: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \ln(x^2+x+1)$.

Kettenregel $\Rightarrow \quad h'(x) = (\ln \circ g)'(x) = \ln'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$

Kettenregel $\Rightarrow \quad f'(x) = (\ln \circ h)'(x) = \ln'(h(x)) \cdot h'(x) = \frac{h'(x)}{h(x)}$

$$= \frac{\frac{2x+1}{x^2+x+1}}{\ln(x^2+x+1)} = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln(x^2+x+1)}$$

(Es geht natürlich auch direkt in einem Schritt:

$$f'(x) = (\ln \circ \ln \circ g)'(x) = \ln'((\ln \circ g)(x))\,(\ln \circ g)'(x) = \ln'((\ln \circ g)(x))\,\ln'(g(x))\,g'(x)$$

$$= \frac{1}{(\ln \circ g)(x)} \cdot \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{1}{\ln(x^2+x+1)} \cdot \frac{1}{x^2+x+1} \cdot (2x+1) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)\ln(x^2+x+1)}.)$$

zu (a) (ii) $g:]0,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \exp(-x) \cdot \frac{1-x^2}{x+5}$

Definiere $u:]0,1[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto e^{-x}, \quad v:]0,1[\to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{1-x^2}{x+5}$

$u'(x) = -e^{-x}$, Quotientenregel $\Rightarrow \quad v'(x) = \frac{(-2x)\cdot(x+5) - (1-x^2)\cdot 1}{(x+5)^2} = \frac{-x^2-10x-1}{(x+5)^2}$

$= -\frac{x^2+10x+1}{(x+5)^2}$ Produktregel $\Rightarrow \quad g'(x) = (uv)'(x) =$

$$u'(x)\,v(x) + u(x)\,v'(x) = -e^{-x} \cdot \frac{1-x^2}{x+5} - e^{-x} \cdot \frac{x^2+10x+1}{(x+5)^2}$$

zu (a) (iii) $h:]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $h(x) = x^x = e^{x \cdot \ln(x)}$

Sei $h_1:]1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $x \mapsto x \cdot \ln(x)$.

Produktregel $\rightsquigarrow$ $h_1'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

Kettenregel $\Rightarrow$ $h'(x) = e^{h_1(x)} \cdot h_1'(x) = e^{x \cdot \ln(x)} \cdot (\ln(x) + 1) = x^x \cdot (\ln(x) + 1)$

zu (b) Lt. Vorlesung ist $\arctan: \mathbb{R} \to]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[$ die Umkehrfkt. von $\tan:]-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi[\to \mathbb{R}$.

$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, Quotientenregel $\Rightarrow$ $\tan'(x) = \frac{\sin'(x)\cos(x) - \sin(x)\cos'(x)}{\cos(x)^2} = \frac{\cos(x)^2 - \sin(x)(-\sin(x))}{\cos(x)^2}$

$= \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \cos(x)^{-2}$ Sei nun $x \in \mathbb{R}$ und $y = \arctan(x)$. Umkehrregel $\Rightarrow$

$\Rightarrow \arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(y)} = \cos(y)^2 = \frac{\cos(y)^2}{1} = \frac{\cos(y)^2}{\sin(y)^2 + \cos(y)^2} = \frac{1}{\tan(y)^2 + 1}$

$= \frac{1}{\tan(\arctan(x))^2 + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$.

zu (c) $j: [3, 6] \to [11, 179]$, $x \mapsto x^3 - 7x + 5$

Umkehrfkt. $j^{-1}: [11, 179] \to [3, 6]$ gesucht: $(j^{-1})'(a)$ für $a = 41, 95$

$j(4) = 41 \Rightarrow j^{-1}(41) = 4$ Umkehrregel $\Rightarrow (j^{-1})'(41) = \frac{1}{j'(4)} = \frac{1}{41}$

$j'(x) = 3x^2 - 7$ $j(5) = 95 \Rightarrow j^{-1}(95) = 5$ $(j^{-1})'(95) = \frac{1}{j'(5)} = \frac{1}{68}$.

Aufgabe 3

zu (a) geg. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

z.zg.: (i) f ist in 0 unstetig (ii) f ist in a stetig $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

zu (i) Ang. f ist in 0 stetig. Dann gilt für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ jeweils $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(0)$. Betrachte nun aber die spezielle Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $x_n = \dfrac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2\pi n}$. Es gilt zwar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\frac{1}{2}\pi + 2\pi n} =$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{n} + 2\pi} = \frac{0}{\frac{1}{2\pi}\cdot 0 + 2\pi} = 0,$$ aber $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{2}\pi + 2\pi n\right) =$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = f(0)$. Also ist f in 0 unstetig.

zu (ii) Vorweg bemerken wir, dass $f_1: \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ eine stetige Fkt. ist, als Komposition der stetigen Funktion $\mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}, \ x \mapsto \frac{1}{x}$ mit der ebenfalls stetigen Sinusfunktion. Sei nun $a \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ vorgegeben und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. Zu zeigen ist $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gibt es für $\varepsilon = |a|$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon \ \forall n \geq N$. Ist nun $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$, dann gilt im Fall $a < 0$ jeweils $x_n < a + \varepsilon = a + (-a) = 0$, im Fall $a > 0$ jeweils $x_n > a - \varepsilon = a - a = 0$, in jedem Fall also $x_n \neq 0$ und $f(x_n) = f_1(x_n)$.

Es folgt $$\lim_{n\to\infty} f(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ x_n \neq 0 \\ \forall n \geq N}}{=} \lim f_1(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Stetigkeit} \\ \text{von } f_1}}{=} f_1(a) \underset{\substack{\uparrow \\ a \neq 0}}{=} f(a).$$

zu 1(b) geg. $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$

Beh.: (i) g ist stetig in 0 (ii) g ist nicht diff'bar in 0

zu (i) Sei $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

z.zg.: $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(0)$ Sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgeg. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < \varepsilon$ $\forall n \geq N$. Ist $n \geq N$ mit $x_n = 0$, dann gilt $|g(x_n)| = |g(0)| = 0 < \varepsilon$. Im Fall $n \geq N$, $x_n \neq 0$ gilt $|\sin(\frac{1}{x_n})| \leq 1$ und somit ebenfalls $|g(x_n)| = |x_n| \cdot |\sin(\frac{1}{x_n})| \leq |x_n| < \varepsilon$.

Insgesamt ist $|g(x_n)| < \varepsilon$ also $\forall n \geq N$ erfüllt und $\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = 0 = g(0)$ damit nachgewiesen.

zu (ii) Ang. g ist in 0 diff'bar. Dann existiert der Funktionsgrenzwert $c = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \sin(\frac{1}{x})$. Dies bedeutet, dass für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ jeweils $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{x_n}) = c$ gilt. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $x_n = (\frac{1}{2}\pi + 2\pi n)^{-1}$ erfüllt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{x_n}) = 1$, siehe oben. Also muss $c = 1$ gelten. Aber die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ geg. durch $y_n = \frac{1}{\pi n}$ erfüllt $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{\pi} \cdot 0 = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\frac{1}{y_n}) = \lim\limits_{n\to\infty} \sin(\pi n) = \lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, daraus folgt $c = 0$.

Der Widerspruch $1 = c = 0$ zeigt, dass die Annahme falsch war und g in 0 nicht diff'bar ist. $\square$