Analysis einer Variablen

— Lösung Blatt 10 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1

zu (a) Wir weisen die Existenz der Nullstellen mit dem Zwischenwertsatz nach. Als Polynomfunktion ist f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, damit auch auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Wegen $f(1) = -2 < 0$ und $f(2) = 6 > 0$ kann der Zwischenwertsatz auf das Intervall $[1,2]$ angewendet werden und liefert die Existenz einer Nullstelle $x_1 \in \,]1,2[$. Durch probeweises Einsetzen findet man $f(-1) = 0$, also ist $x_2 = -1$ eine weitere Nullstelle.

Die Werte $f(-2) = -2$ und $f(-3) = -14$ deuten darauf hin, dass f im Bereich $x \leq -2$ durchweg negativ ist. Wenn der Graph von f allerdings die x-Achse in -1 schneidet und nicht nur berührt, dann muss f in der Nähe von -1 noch positive Werte annehmen. Tatsächlich gilt $f(-\frac{5}{4}) = \frac{7}{64}$. Wegen $f(-2) < 0$ und $f(-\frac{5}{4}) > 0$ können wir den Zwischenwertsatz auf das Intervall $\left[-2, -\frac{5}{4}\right]$ anwenden und erhalten eine weitere Nullstelle $x_3 \in \left]-2, -\frac{5}{4}\right[$. Wegen $x_3 < -\frac{5}{4} < x_2 < 1 < x_1$ sind x_1, x_2, x_3 tatsächlich drei *verschiedene* Nullstellen von f.

zu (b) Sei $u \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = u$ existiert. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass f als Polynomfunktion ungeraden Grades mit Leitkoeffizienten 1 die Grenzwerte

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

besitzt. Wegen $\lim_n (-n) = -\infty$ und $\lim_n n = +\infty$ folgt daraus $\lim_n f(-n) = -\infty$ und $\lim_n f(n) = +\infty$. Insbesondere gibt es natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ mit $f(-m) < u$ und $f(n) > u$. Weil f zudem stetig ist, können wir den Zwischenwertsatz auf das Intervall $[-m, n]$ anwenden und erhalten ein $x \in \,]-m, n[$ mit $f(x) = u$.

zu (c) Hier besteht unser Ziel darin, das Maximumsprinzip anzuwenden. Dieses gilt in der angegebenen Form für endliche abgeschlossene Intervalle, aber nicht für unsere Menge $A = \,]-\infty, -1[$. Deshalb zeigen wir zunächst, dass die Funktion f „sehr weit links" mit Sicherheit *nicht* ihren maximalen Wert annimmt. Dazu verwenden wir Satz (11.13): Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ gibt es für die Umgebung $V = \,]-\infty, 0[$ eine Umgebung U von $-\infty$ mit $f(U) \subseteq V$. Diese Umgebung U enthält eine Teilmenge der Form $]-\infty, -\kappa[$ mit $\kappa \in \mathbb{R}^+$. Weil die Inklusion $f(]-\infty, -\kappa[) \subseteq V$ richtig bleibt, wennn wir das Intervall $]-\infty, -\kappa[$ verkleinern, können wir $\kappa \geq \frac{5}{4}$ annehmen. Es gibt also ein $\kappa \in \mathbb{R}^+$ mit $\kappa \geq \frac{5}{4}$ und $f(x) < 0$ für alle $x < -\kappa$.

Wenden wir nun das Maximumsprinzip auf die stetige Funktion $f|_{[-\kappa,-1]}$ an. Demnach gibt existiert das Maximum $c = \max f([-\kappa, -1])$, und wegen $-\frac{5}{4} \in [-\kappa, -1]$ und $f(-\frac{5}{4}) > 0$ gilt $c > 0$. Wegen $f(-1) = 0$ wird c in einem Punkt $a \in [-\kappa, -1[$ angenommen. Für alle $x < -\kappa$ gilt $f(x) < 0 < c$. Daraus folgt insgesamt $c \geq f(x)$ für alle $x \in A$. Zusammen mit $c = f(a) \in f(A)$ erhalten wir $c = \max f(A)$, insbesondere besitzt $f(A)$ ein Maximum.

Beweisen wir nun noch die Gleichung $f(A) = \,]-\infty, c]$. Die Inklusion „$\subseteq$" ist erfüllt, denn für alle $x \in A$ gilt $f(x) \leq c$ und somit $f(x) \in \,]-\infty, c]$. Zum Beweis von „$\supseteq$" sei $y \in \,]-\infty, c]$ vorgegeben. Ist $y = c$, dann gilt $c = f(a) \in f(A)$. Setzen wir nun $y < c$ voraus. Wegen $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ gilt insbesondere $\lim_n f(-n) = -\infty$, denn $(-n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Folge mit $\lim_n (-n) = -\infty$. Es existiert also ein $N \in \mathbb{N}$ mit $-N < a$ und $f(-N) < y$. Wenden wir den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion $f|_{[-N,a]}$ an, so erhalten wir wegen $f(-N) < y$ und $f(a) = c > y$ ein $x \in \,]-N, a[\subseteq A$ mit $f(x) = y$. Also gilt auch in diesem Fall $y = f(x) \in f(A)$.

Aufgabe 2

zu (a) Zuerst zeigen wir $\lim_{x\to+\infty}\cosh(x) = +\infty$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = +\infty$. Zu zeigen ist $\lim_n \cosh(x_n) = +\infty$. Sei dafür $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$ und $\lim_n x_n = +\infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\exp(x_n) > 2\kappa$ für alle $n \geq N$. Es folgt $\cosh(x_n) = \frac{1}{2}\exp(x_n) + \frac{1}{2}\exp(-x_n) > \frac{1}{2}\exp(x_n) > \frac{1}{2}\cdot 2\kappa = \kappa$ für alle $n \geq N$.

Nun zeigen wir $\lim_{x\to-\infty}\cosh(x) = +\infty$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = -\infty$. Zu zeigen ist $\lim_n \cosh(x_n) = +\infty$. Wieder sei $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $\lim_n(-x_n) = +\infty$ und $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\exp(-x_n) > 2\kappa$ für alle $n \geq N$. Es folgt $\cosh(x_n) = \frac{1}{2}\exp(x_n) + \frac{1}{2}\exp(-x_n) > \frac{1}{2}\exp(-x_n) > \frac{1}{2}\cdot 2\kappa = \kappa$ für alle $n \geq N$.

Als nächstes zeigen wir $\lim_{x\to+\infty}\sinh(x) = +\infty$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = +\infty$. Zu zeigen ist $\lim_n \sinh(x_n) = +\infty$. Sei $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$ und $\lim_n x_n = +\infty$ gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\exp(x_n) > 4\kappa$ für alle $n \geq N_1$ und $\exp(-x_n) < 2\kappa$ für alle $n \geq N_2$. Setzen wir $N = \max\{N_1, N_2\}$, dann folgt $\sinh(x_n) = \frac{1}{2}\exp(x_n) - \frac{1}{2}\exp(-x_n) > \frac{1}{2}\cdot 4\kappa - \frac{1}{2}\cdot 2\kappa = 2\kappa - \kappa = \kappa$ für alle $n \geq N$.

Zum Schluss zeigen wir $\lim_{x\to-\infty}\sinh(x) = -\infty$. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n x_n = +\infty$. Zu zeigen ist $\lim_n \sinh(x_n) = -\infty$. Sei $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$, $\lim_n x_n = -\infty$ und $\lim_n(-x_n) = +\infty$ gibt es $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\exp(-x_n) > 4\kappa$ für alle $n \geq N_1$ und $\exp(x_n) < 2\kappa$ für alle $n \geq N_2$. Setzen wir $N = \max\{N_1, N_2\}$, dann folgt $\sinh(x_n) = \frac{1}{2}\exp(x_n) - \frac{1}{2}\exp(x_n) < \frac{1}{2}\cdot(2\kappa) - \frac{1}{2}\cdot(4\kappa) < \kappa - 2\kappa = -\kappa$ für alle $n \geq N$.

zu (b) Die Abbildungen sinh und $\cosh|_{[0,+\infty[}$ sind laut Angabe beide streng monoton wachsend und somit injektiv. Zum Nachweis der Surjektivität von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei $c \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $a \in \mathbb{R}$ mit $\sinh(a) = c$ existiert. Wegen $\lim_{x\to-\infty}\sinh(x) = -\infty$ und $\lim_n(-n) = -\infty$ gibt es ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\sinh(-N_1) < c$. Wegen $\lim_{x\to+\infty}\sinh(x) = +\infty$ und $\lim_n n = +\infty$ gibt es ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $\sinh(N_2) > c$. Wenden wir den Zwischenwertsatz auf die stetige Funktion $\sinh|_{[-N_1,N_2]}$ an, so erhalten wir ein $a \in]-N_1, N_2[$ mit $\sinh(a) = c$.

Für den Nachweis der Surjektivität von $\cosh|_{[0,+\infty[} : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ sei $c \in [1,+\infty[$ vorgegeben. Zu zeigen ist, dass ein $a \in [0,+\infty[$ mit $\cosh(a) = c$ existiert. Wegen $\cosh(0) = 1$ können wir uns auf den Fall $c > 1$ beschränken. Wegen $\lim_{x\to+\infty}\cosh(x) = +\infty$ und $\lim_n n = +\infty$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\cosh(N) > c$. Wegen wir den Zwischenwertsatz auf $\cosh|_{[0,N]}$ an, so erhalten wir ein $a \in]0, N[$ mit $\cosh(a) = c$.

zu (c) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(g\circ\sinh)(x) = g(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})) = \ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}))^2 + 1}\right) =$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2 + 4)}\right) = \ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2)}\right) =$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \sqrt{(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}))^2}\right)$$

$$= \ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + \tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})\right) = \ln(e^x) = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x).$$

Damit ist $g \circ \sinh = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ nachgewiesen. Es folgt $\operatorname{arsinh}(x) = \sinh^{-1}(x) = g(x)$.

Sei nun $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $h(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$. Für alle $x \in [0, +\infty[$ gilt

$$(h \circ \cosh)(x) \quad = \quad h(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})) \quad = \quad \ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \sqrt{(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}))^2 - 1}\right) \quad =$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} + 2 - 4)}\right) \quad = \quad \ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \sqrt{\tfrac{1}{4}(e^{2x} + e^{-2x} - 2)}\right) \quad =$$

$$\ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \sqrt{(\tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}))^2}\right)$$

$$= \quad \ln\left(\tfrac{1}{2}(e^x + e^{-x}) + \tfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})\right) \quad = \quad \ln(e^x) \quad = \quad x \quad = \quad \mathrm{id}_{[0,+\infty[}(x).$$

Damit ist $h \circ \cosh = \mathrm{id}_{[0,+\infty[}$ nachgewiesen. Es folgt $\mathrm{arcosh}(x) = \cosh^{-1}(x) = h(x)$.

Anmerkung:
Man hätte auch $\sinh \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ und $\cosh \circ h = \mathrm{id}_{[1,+\infty[}$ nachrechnen können. Eventuell ist die Rechnung dann sogar etwas kürzer.

Aufgabe 3

zu (a) Ist $\sigma = 0$, dann ist $\rho \geq \sigma$ offenbar erfüllt. Setzen wir also $\sigma \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ voraus. Im Fall $\sigma \in \mathbb{R}^+$ setzen wir $I =]a - \sigma, a + \sigma[$, im Fall $\sigma = +\infty$ sei $I = \mathbb{R}$. Sei außerdem $x_1 \in I$ beliebig vorgegeben. Wenn wir zeigen können, dass f in x_1 absolut konvergiert, dann folgt nach Definition des Konvergenzradius $\rho \geq \sigma$ im ersten bzw. $\rho = +\infty$ im zweiten Fall.

Nach Voraussetzung gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $r \in \mathbb{R}^+$ mit $|a_n| \leq r|b_n|$ für alle $n \geq N$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ folgt daraus $|a_n||x_1 - a|^n \leq r|b_n||x_1 - a|^n$. Wegen Proposition (12.6) und nach Definition des Konvergenzradius σ konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - a)^n$ in x_1 absolut, also konvergiert auch $\sum_{n=0}^{\infty} rb_n(x_1 - a)^n$ absolut. Wegen $|a_n(x_1 - a)^n| \leq |a_n||x_1 - a|^n \leq r|b_n||x_1 - a|^n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ folgt die absolute Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x_1 - a)^n$ aus dem Majorantenkriterium.

zu (b)(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 8$ gilt $n^4 - 4n^3 \leq n^4$ und $n^4 - 4n^3 \geq \frac{1}{2}n^4$, Letzteres auf Grund der Äquivalenz

$$n^4 - 4n^3 \geq \tfrac{1}{2}n^4 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}n^4 \geq 4n^3 \quad \Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}n \geq 4 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq 8.$$

Nach Teil (a) haben $f(x)$ und $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^4 x^n$ somit denselben Konvergenzradius. Sei $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \geq 1$. Dann gilt $|n^4 x^n| \geq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Insbesondere konvergiert die Folge $(n^4 x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen Null, und daraus folgt, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n^4 x^n$ divergiert. Für den Konvergenzradius ρ gilt damit $\rho \leq 1$. Für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ folgt die absolute Konvergenz der Reihe aus dem Quotientenkriterium, denn es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{(n+1)^4 x^{n+1}}{n^4 x^n} \right| \quad = \quad \lim_{n \to \infty} \left|(1 + \tfrac{1}{n})^4 x\right| \quad = \quad |x| \quad < \quad 1.$$

Dies zeigt, dass der Konvergenzradius ρ größer gleich 1, insgesamt also gleich 1 ist.

zu (b)(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\cosh(n) = \frac{1}{2}e^n + \frac{1}{2}e^{-n} \geq \frac{1}{2}e^n$ und $\cosh(n) = \frac{1}{2}e^n + \frac{1}{2}e^{-n} \leq \frac{1}{2}e^n + \frac{1}{2}e^n = e^n$. Aus Teil (a) folgt damit, dass $\sum_{n=1}^{\infty} \cosh(n) x^n$ denselben Konvergenzradius wie $\sum_{n=1}^{\infty} e^n x^n$ hat. Auf Grund der Formel von Cauchy-Hadamard, Satz (12.7), hat die zweite Potenzreihe den Konvergenzradius $(\limsup_n \sqrt[n]{e^n})^{-1} = (\lim_n \sqrt[n]{e^n})^{-1} = (\lim_n e)^{-1} = e^{-1}$.