Dr. Ralf Gerkmann
Sahand Tokasi

Wintersemester 2020/21
08.04.2021

Analysis einer Variablen (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Online-Nachholklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Die reguläre Klausur enthält wie immer 8 Aufgaben. Diesmal ist allerdings keine Multiple-Choice-Aufgabe dabei.

(c) Das Deckblatt sollte nach Möglichkeit ausgedruckt und anschließend ausgefüllt werden. Falls Sie keinen Drucker zur Verfügung haben, können Sie aber auch die auszufüllenden Teile in derselben Anordnung auf einem leeren Blatt Papier unterbringen. Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(d) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(e) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Hochladen unter Moodle zur Verfügung. Akzeptiert wird nur ein einziges, zusammenhängendes PDF-Dokument bestehend aus DIN A4-Seiten.

(f) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(g) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig, solange das in der Aufgabenstellung nicht ausdrücklich zugelassen wird.

(h) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____________________

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2) \quad = \quad \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n.$$

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie hier tatsächlich einen Induktionsbeweis angeben. Ein direkter Beweis wird nicht akzeptiert.

Lösung:

Induktionsanfang:

Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1}(3k-2) \quad = \quad 3 \cdot 1 - 2 \quad = \quad 1 \quad = \quad \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2} \quad = \quad \tfrac{3}{2} \cdot 1^2 - \tfrac{1}{2} \cdot 1.$$

Die Gleichung ist also für $n = 1$ erfüllt.

Induktionsschritt:

Sei $n \in \mathbb{N}$, und setzen wir die Gleichung n voraus. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1}(3k-2) \quad = \quad \sum_{k=1}^{n}(3k-2) + 3 \cdot (n+1) - 2 \quad \overset{(*)}{=} \quad \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n + 3 \cdot (n+1) - 2 \quad =$$

$$\tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n + 3n + 3 - 2 \quad = \quad \tfrac{3}{2}n^2 + \tfrac{5}{2}n + 1 \quad = \quad \tfrac{3}{2}n^2 + 3n + \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}n - \tfrac{1}{2} \quad = \quad \tfrac{3}{2}(n+1)^2 - \tfrac{1}{2}(n+1).$$

(Dabei wurde an der Stelle (*) die Induktionsvoraussetzung angewendet.) Also ist die Gleichung auch für $n + 1$ erfüllt.

Name: ____________________

Aufgabe 2. (7+3 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 3f(x) + 7$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann auch g bijektiv ist.

(b) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = |x + 1|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Bildmenge $h(]-3, 7])$ und die Urbildmenge $h^{-1}(\mathbb{R}^+)$ an. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

Lösung:

zu (a) *1. Variante:* direkter Nachweis

Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $g(x) = g(y)$. Dann gilt $3f(x) + 7 = 3f(y) + 7$, woraus $3f(x) = 3f(y)$ und $f(x) = f(y)$ folgt. Da f nach Voraussetzung injektiv ist, folgt $x = y$. Damit ist die Injektivität von g nachgewiesen. Zum Nachweis der Surjektivität sei $z \in \mathbb{R}$ vorgegeben. Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt die Äquivalenz $g(x) = z \Leftrightarrow 3f(x)+7 = z \Leftrightarrow 3f(x) = z - 7 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{3}(z - 7)$. Da f nach Voraussetzung surjektiv ist, existiert ein $x \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{3}(z - y)$, und dieses x erfüllt dann auch $g(x) = z$. Also ist g auch surjektiv, und insgesamt bijektiv.

2. Variante: durch Komposition von Abbildungen

Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = 3x+7$. Diese Abbildung ist bijektiv, denn durch $\tilde{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{3}(x-7)$ ist eine Umkehrabbildung gegeben: Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt sowohl $(\tilde{h} \circ h)(x) = \tilde{h}(h(x)) = \tilde{h}(3x+7) = \frac{1}{3}((3x+7)-7) = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)$ als auch $(h \circ \tilde{h})(x) = h(\tilde{h}(x)) = h(\frac{1}{3}(x - y)) = 3 \cdot \frac{1}{3}(x - 7) + 7 = x = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(x)$. Es gilt $g = h \circ f$, denn für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = 3f(x) + 7$. Als Komposition zweier bijektiver Abbildung ist g laut Vorlesung ebenfalls bijektiv.

zu (b) Es ist $h(\mathbb{R}) = [0, 8]$ und $h^{-1}(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (3+7 Punkte)

Wir betrachten die Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A \quad = \quad \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Bestimmen Sie Minimum, Maximum, Infimum und Supremum von A, sofern diese existieren (jeweils mit Nachweis).

Lösung:

zu (a) Wäre A ein Intervall, dann müsste für alle $a, b \in A$ mit $a < b$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ auch x in A liegen. Die Punkte $\frac{1}{2}$ und 1 sind offenbar in A enthalten, und es gilt $\frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$. Aber $\frac{3}{4}$ liegt weder in der Menge $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (denn aus $\frac{1}{n} = \frac{3}{4}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ würde $n = \frac{4}{3}$ folgen, im Widerspruch zu $\frac{4}{3} \notin \mathbb{N}$) noch in der Menge $\{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ (denn für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $1 + \frac{1}{n} > 1 > \frac{3}{4}$). Es gilt also $\frac{3}{4} \notin A$.

zu (b) Es gilt $2 = 1 + \frac{1}{1} \in A$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt sowohl $2 \geq 1 + \frac{1}{n}$ also auch $2 \geq \frac{1}{n}$. Dies zeigt, dass 2 eine obere Schranke von A ist, die zugleich in A enthalten ist. Es gilt somit $\max(A) = 2$, und damit auch $\sup(A) = 2$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \frac{1}{n}$ und $0 < 1 + \frac{1}{n}$, die Zahl 0 ist also eine untere Schranke von A. Zugleich existiert für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $a \in A$ mit $a < 0 + \varepsilon$. Denn wegen $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \varepsilon$, und $\frac{1}{n}$ ist in A enthalten. Ingesamt ist 0 damit die größte untere Schranke von A, also $\inf(A) = 0$. Hätte die Menge A ein Minimum, dann müsste es mit $\inf(A) = 0$ übereinstimmen und insbesondere $0 \in A$ gelten. Aber wegen $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$ und $1 + \frac{1}{n} \in \mathbb{R}^+$ besteht die Menge A ausschließlich aus positiven Zahlen. Also besitzt A kein Minimum.

Name: ______________________________

Aufgabe 4. (2+4+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und untersuchen Sie auch, ob darüber hinaus absolute Konvergenz vorliegt. Geben Sie dazu jeweils ein geeignetes Konvergenzkriterium an und überprüfen Sie dessen Voraussetzungen.

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}} \qquad \text{(c)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+2n+6}.$$

Lösung:

zu (a) Die Folge $(n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen Null, statt dessen gilt $\lim_n n^2 = +\infty$. Laut Vorlesung folgt daraus die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} n^2$. Erst recht ist die Reihe nicht absolut konvergent.

zu (b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}}$ besteht aus positiven Zahlen, und wegen $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ und $0 < a_n < \frac{1}{n}$ gilt $\lim_n a_n = 0$ auf Grund des Sandwich-Lemmas. Außerdem gilt $n + \sqrt{n} < (n+1) + \sqrt{n+1}$ und somit $a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}} > \frac{1}{(n+1)+\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also streng monoton fallend. Nach dem Leibniz-Kriterium ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ somit konvergent. Die absolute Konvergenz der Reihe ist nach Definition gleichbedeutend mit der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$\frac{1}{2n} \le \frac{1}{n+\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad 2n \ge n + \sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad n \ge \sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{n} \ge 1 \quad \Leftrightarrow \quad n \ge 1^2 = 1 \quad ,$$

und dies ist für alle $n \in \mathbb{N}$ erfüllt. Laut Vorlesung ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, somit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Aus dem Minorantenkriterium folgt somit die Divergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ ist also nicht absolut konvergent.

zu (c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$\frac{n+5}{n^3+2n+6} \le \frac{2}{n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^3+2n+6}{n+5} \ge \tfrac{1}{2}n^2 \quad \Leftrightarrow \quad 2(n^3+2n+6) \ge (n+5)n^2$$

$$\Leftrightarrow \quad 2n^3 + 4n + 12 \ge n^3 + 5n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n^3 + 4n + 12 \ge 5n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n + \tfrac{4}{n^2} + \tfrac{12}{n^3} \ge 5 \quad ,$$

und die letzte Ungleichung ist für alle $n \ge 5$ erfüllt. Laut Vorlesung konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, somit auch $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2}$. Die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+2n+6}$ folgt somit aus dem Majorantenkriterium. Da die Folge $(\frac{n+5}{n^3+2n+6})_{n\in\mathbb{N}}$ nur aus positiven reellen Zahlen besteht, ist die Konvergenz der Reihe gleichbedeutend mit absoluter Konvergenz.

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (4+4+2 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 2x+5 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt 1 nicht stetig ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die Funktion f in jedem anderen Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

(c) Geben Sie die (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ an, sofern diese existieren. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

In Teil (a) und (b) arbeiten Sie direkt mit der Definition der Stetigkeit oder mit dem ε-δ-Kriterium. Die Argumentation mit links- oder rechtsseitiger Stetigkeit bzw. links- oder rechtsseitigen Grenzwerten ist hier unzulässig.

Lösung:

zu (a) Wäre f in 1 stetig, dann müsste für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = 1$ jeweils $\lim_n f(x_n) = f(1) = 2\cdot 1 + 5 = 7$ gelten. Die Folge $(1-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 1, es gilt aber $\lim_n f(x_n) = \lim_n \frac{1}{(1-\frac{1}{n})-1} = \lim_n(-n) = -\infty$. Also ist f in 1 unstetig.

zu (b) Sei $a \in \mathbb{R} \setminus 1$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = a$. Betrachten wir zunächst den Fall $a < 1$. Setzen wir $\varepsilon = 1 - a \in \mathbb{R}^+$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ und insbesondere $x_n < a + \varepsilon = 1$ für alle $n \geq N$. Es folgt $f(x_n) = \frac{1}{1-x_n}$ für alle $n \geq N$ und somit auf Grund der Grenzwertsätze

$$\lim_n f(x_n) \quad = \quad \lim_n \frac{1}{1-x_n} \quad = \quad \frac{1}{1-\lim_n x_n} \quad = \quad \frac{1}{1-a} \quad = \quad f(a).$$

Nun betrachten wir den Fall $a > 1$. Setzen wir $\varepsilon = a - 1$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - a| < \varepsilon$ und insbesondere $x_n > a - \varepsilon = a - (a-1) = 1$ für alle $n \geq N$. Es folgt $f(x_n) = 2x_n + 5$ für alle $n \geq N$ und somit $\lim_n f(x_n) = \lim_n(2x_n+5) = 2a+5 = f(a)$. In beiden Fällen ist f also im Punkt a stetig.

zu (c) Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x+5) = +\infty$.

Name: ____

Aufgabe 6. (2+4+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \max\{4, x^2\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Funktionswerte $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ und $f(3)$.

(b) Zeigen Sie, dass f im Punkt 2 nicht differenzierbar ist.

(c) Weisen Sie nach, dass f im Punkt 3 differenzierbar ist, und geben Sie $f'(3)$ an.

Arbeiten Sie in Teil (b) und (c) direkt mit der Definition der Differenzierbarkeit. Die Argumentation mit links- oder rechtsseitiger Differenzierbarkeit bzw. links- oder rechtsseitigen Grenzwerten ist hier unzulässig.

Lösung:

zu (a) Es gilt $f(-3) = 9$, $f(-2) = f(-1) = f(0) = f(1) = f(2) = 4$ und $f(3) = 9$.

zu (b) Nehmen wir an, die Funktion f ist in 2 differenzierbar. Dann existiert in $\mathbb{R}$ der Funktionsgrenzwert

$$c = \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}.$$

Die Folge $(2 - \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2. Nach Definition des Funktionsgrenzwertes erhalten wir

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(2-\frac{1}{n}) - f(2)}{(2-\frac{1}{n}) - 2} = \lim_{n\to\infty} (-n)\cdot(f(2-\tfrac{1}{n}) - f(2)) = \lim_{n\to\infty} (-n)\cdot(4-4) \\ &= \lim_{n\to\infty} (-n)\cdot 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = 0. \end{aligned}$$

Aber auch die Folge $(2 + \frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 2, und wir erhalten entsprechend

$$\begin{aligned} c &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(2+\frac{1}{n}) - f(2)}{(2+\frac{1}{n}) - 2} = \lim_{n\to\infty} n\cdot((2+\tfrac{1}{n})^2 - 2^2) = \lim_{n\to\infty} n\cdot((4+\tfrac{4}{n}+\tfrac{1}{n^2}) - 4) \\ &= \lim_{n\to\infty} n\cdot(\tfrac{4}{n}+\tfrac{1}{n^2}) = \lim_{n\to\infty} (4+\tfrac{1}{n}) = 4+0 = 4. \end{aligned}$$

Der Widerspruch $0 = c = 4$ zeigt, dass die Annahme falsch war, die Funktion f in 2 also nicht differenzierbar ist.

zu (c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ mit $\lim_n x_n = 3$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - 3| < 1$. Es gilt dann insbesondere $x_n > 3 - 1 = 2$, also $x_n^2 > 2^2 = 4$ und somit $f(x_n) = \max\{x_n^2, 4\} = x_n^2$ für alle $n \geq N$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(3)}{x_n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n^2 - 9}{x_n - 3} = \lim_{n\to\infty} \frac{(x_n-3)(x_n+3)}{x_n - 3} = \lim_{n\to\infty} (x_n + 3) = 3+3 = 6.$$

Nach Definition der Funktionsgrenzwerte gilt also

$$f'(3) = \lim_{x\to 3} \frac{f(x) - f(3)}{x - 3} = 6.$$

Name: ______________________________

Aufgabe 7. (4+2+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^4 - 7x + 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Begründen Sie mit Hilfe des Maximumsprinzips, dass f ein globales Minimum $c \in \mathbb{R}$ mit $c < 0$ besitzt.

(b) Geben Sie die (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ an, sofern diese existieren. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes die Gleichung $f(\mathbb{R}) = [c, +\infty[$.

(Beachten Sie, dass Zwischenwertsatz und Maximumsprinzip in der Vorlesung nur für Funktionen auf endlichen abgeschlossenen Intervallen formuliert wurden.)

Lösung:

zu (a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 10$ gilt $f(x) = x^4(1 - \frac{7}{x^3} - \frac{3}{x^4}) \geq x^4(1 - \frac{7}{|x|^3} - \frac{3}{|x|^4}) > 10^4(1 - \frac{7}{10^3} - \frac{3}{10^4}) > \frac{1}{2} \cdot 10^4 = 5000$. Als Polynomfunktion ist f stetig, somit auch die eingeschränkte Funktion $f|_{[-10,10]}$. Nach dem Maximumsprinzip existiert ein $q \in [-10, 10]$, in dem die Funktion $f|_{[-10,10]}$ ihr Minimum $c = f(q)$ annimmt. Wegen $1 \in [-10, 10]$ und $f(1) = 1 - 7 + 3 = -3 < 0$ ist $c = f(q) \leq f(1) = -3$, also insbesondere $c < 0$. Für alle $x \in [-10, 10]$ gilt dann $f(x) \geq c$, und für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-10, 10]$ gilt $|x| > 10$ und somit $f(x) > 5000 > 0 > c$. Dies zeigt, dass c das globale Minimum von f ist.

zu (b) Es gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. (In der Vorlesung wurde gezeigt, dass Polynomfunktionen mit geradzahligem Grad (hier 4) und Leitkoeffizient 1 immer dieses Grenzwertverhalten für $x \to \pm\infty$ aufweisen.)

zu (c) Nach Teil (a) gilt $f(x) \geq c$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Deshalb gilt $f(\mathbb{R}) \subseteq [c, +\infty[$. Zum Nachweis der umgekehrten Inklusion sei $y \in [c, +\infty[$ vorgegeben. Im Fall $y = c$ gilt $y = c = f(q) \in f(\mathbb{R})$. Ansonsten gilt $f(q) < y$. Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ gibt es außerdem ein $b \in \mathbb{R}$ mit $b > q$ und $f(b) > y$. Die Anwendung des Zwischenwertsatzes auf die stetige Funktion $f|_{[q,b]}$ liefert wegen $f(q) < y$ und $y < f(b)$ ein $x \in]q, b[$ mit $f(x) = y$. Also ist $y \in f(\mathbb{R})$ auch in diesem Fall erfüllt.

Name: ____________________

Aufgabe 8. (3+3+4 Punkte)

(a) In den Übungen wurde gezeigt, dass die Umkehrfunktion von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ gegeben ist. (Dies darf ohne Beweis verwendet werden.) Berechnen Sie die Ableitungsfunktion von f entweder durch Anwendung der Ketten- oder durch Anwendung der Umkehrregel.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich monoton wachsend ist.

(c) Bestimmen Sie alle lokalen und alle globalen Extrema von h (jeweils mit Nachweis).

(In Teil (a) ist ein kleinschrittiger Rechenweg anzugeben. Insbesondere muss erkennbar sein, wie die jeweilige Differentiationsregel angewendet wird. Die alleinige Angabe des Ergebnisses wird mit null Punkten bewertet.)

Lösung:

zu (a) *1. Variante:* Anwendung der Kettenregel

Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $g(x) = x + \sqrt{x^2+1} = x + (x^2+1)^{1/2}$ hat die Ableitung $g'(x) = 1 + 2x \cdot \frac{1}{2} \cdot (x^2+1)^{-1/2} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Die Kettenregel liefert wegen $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ dann die Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\ln \circ g)'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{x\sqrt{x^2+1}+x^2+1} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

2. Variante: Anwendung der Umkehrregel

Es gilt $\sinh'(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$. Da f laut Angabe die Umkehrfunktion von sinh ist, liefert die Umkehrregel somit

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sinh'(f(x))} = \left(\tfrac{1}{2}e^{f(x)} + \tfrac{1}{2}e^{-f(x)}\right)^{-1} = 2 \cdot \left(x + \sqrt{x^2+1} + \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)^{-1} \\ &= 2 \cdot \frac{(x+\sqrt{x^2+1})^2+1}{x+\sqrt{x^2+1}} = 2 \cdot \left(\frac{x^2+2x\sqrt{x^2+1}+(x^2+1)+1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)^{-1} = \frac{2x+2\sqrt{x^2+1}}{2x^2+2x\sqrt{x^2+1}+2} \\ &= \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{x^2+1+x\sqrt{x^2+1}} = \frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+x)} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}. \end{aligned}$$

zu (b) Für alle $x \in\,]0,3[$ gilt $h'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x-1)^2 \geq 0$. Laut Vorlesung folgt daraus, dass h auf $[0,3]$ monoton wachsend ist.

zu (c) Die Ableitungsfunktion h' besitzt auf $]0,3[$ lediglich im Punkt 1 eine Nullstelle, somit ist nur dort ein lokales Extremum möglich. Allerdings gilt $h'(x) > 0$ für alle $x \in\,]0,1[$ und für alle $x \in\,]1,3[$, deshalb ist h sowohl auf $[0,1]$ als auch auf $[1,3]$ streng monoton wachsend. Daraus folgt, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon < 1$ jeweils ein $x \in\,]1-\varepsilon, 1[$ mit $h(x) < h(1)$ und ebenso ein $y \in\,]1, 1+\varepsilon[$ mit $h(y) > h(1)$ existiert. Dies zeigt, dass in 1 kein lokales Extremum vorliegt. Ingesamt gibt es also im gesamten offenen Intervall $]0,3[$ kein lokales Extremum, erst recht kein globales. Da h nach Teil (b) aber auf $[0,3]$ monoton wachsend ist, sind die Punkte 0 und 3 beides globale und damit auch lokale Extrema von h.