LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann
Sahand Tokasi

Wintersemester 2020/21
08.04.2021

Analysis einer Variablen (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Online-Nachholklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Die reguläre Klausur enthält wie immer 8 Aufgaben. Diesmal ist allerdings keine Multiple-Choice-Aufgabe dabei.

(c) Das Deckblatt sollte nach Möglichkeit ausgedruckt und anschließend ausgefüllt werden. Falls Sie keinen Drucker zur Verfügung haben, können Sie aber auch die auszufüllenden Teile in derselben Anordnung auf einem leeren Blatt Papier unterbringen. Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(d) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(e) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Hochladen unter Moodle zur Verfügung. Akzeptiert wird nur ein einziges, zusammenhängendes PDF-Dokument bestehend aus DIN A4-Seiten.

(f) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(g) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig, solange das in der Aufgabenstellung nicht ausdrücklich zugelassen wird.

(h) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ____

Aufgabe 1. (10 Punkte)

Beweisen Sie durch vollständige Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n}(3k-2) \quad = \quad \tfrac{3}{2}n^2 - \tfrac{1}{2}n.$$

Hinweis: Achten Sie darauf, dass Sie hier tatsächlich einen Induktionsbeweis angeben. Ein direkter Beweis wird nicht akzeptiert.

Name: ____

Aufgabe 2. (7+3 Punkte)

(a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive Abbildung und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) = 3f(x) + 7$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Beweisen Sie, dass dann auch g bijektiv ist.

(b) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = |x + 1|$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Geben Sie die Bildmenge $h(]-3, 7])$ und die Urbildmenge $h^{-1}(\mathbb{R}^+)$ an. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (3+7 Punkte)

Wir betrachten die Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ gegeben durch

$$A = \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{1 + \tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Bestimmen Sie Minimum, Maximum, Infimum und Supremum von A, sofern diese existieren (jeweils mit Nachweis).

Name: ____

Aufgabe 4. (2+4+4 Punkte)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz und untersuchen Sie auch, ob darüber hinaus absolute Konvergenz vorliegt. Geben Sie dazu jeweils ein geeignetes Konvergenzkriterium an und überprüfen Sie dessen Voraussetzungen.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^2$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\sqrt{n}}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+5}{n^3+2n+6}$.

Name: ____________________

Aufgabe 5. (4+4+2 Punkte)

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & \text{für } x < 1 \\ 2x+5 & \text{für } x \geq 1. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Punkt 1 nicht stetig ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die Funktion f in jedem anderen Punkt ihres Definitionsbereichs stetig ist.

(c) Geben Sie die (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ an, sofern diese existieren. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

In Teil (a) und (b) arbeiten Sie direkt mit der Definition der Stetigkeit oder mit dem ε-δ-Kriterium. Die Argumentation mit links- oder rechtsseitiger Stetigkeit bzw. links- oder rechtsseitigen Grenzwerten ist hier unzulässig.

Name: ____

Aufgabe 6. (2+4+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \max\{4, x^2\}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Bestimmen Sie die Funktionswerte $f(-3)$, $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ und $f(3)$.

(b) Zeigen Sie, dass f im Punkt 2 nicht differenzierbar ist.

(c) Weisen Sie nach, dass f im Punkt 3 differenzierbar ist, und geben Sie $f'(3)$ an.

Arbeiten Sie in Teil (b) und (c) direkt mit der Definition der Differenzierbarkeit. Die Argumentation mit links- oder rechtsseitiger Differenzierbarkeit bzw. links- oder rechtsseitigen Grenzwerten ist hier unzulässig.

Name: ______________________________

Aufgabe 7. (4+2+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x^4 - 7x + 3$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(a) Begründen Sie mit Hilfe des Maximumsprinzips, dass f ein globales Minimum $c \in \mathbb{R}$ mit $c < 0$ besitzt.

(b) Geben Sie die (eigentlichen oder uneigentlichen) Grenzwerte $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ und $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ an, sofern diese existieren. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(c) Beweisen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes die Gleichung $f(\mathbb{R}) = [c, +\infty[$.

(Beachten Sie, dass Zwischenwertsatz und Maximumsprinzip in der Vorlesung nur für Funktionen auf endlichen abgeschlossenen Intervallen formuliert wurden.)

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (3+3+4 Punkte)

(a) In den Übungen wurde gezeigt, dass die Umkehrfunktion von $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ durch $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ gegeben ist. (Dies darf ohne Beweis verwendet werden.) Berechnen Sie die Ableitungsfunktion von f entweder durch Anwendung der Ketten- oder durch Anwendung der Umkehrregel.

(b) Zeigen Sie, dass die Funktion $h : [0,3] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 - 3x^2 + 3x - 2$ auf ihrem gesamten Definitionsbereich monoton wachsend ist.

(c) Bestimmen Sie alle lokalen und alle globalen Extrema von h (jeweils mit Nachweis).

(In Teil (a) ist ein kleinschrittiger Rechenweg anzugeben. Insbesondere muss erkennbar sein, wie die jeweilige Differentiationsregel angewendet wird. Die alleinige Angabe des Ergebnisses wird mit null Punkten bewertet.)