LMU LUDWIG-MAXIMILIANS-UNIVERSITÄT MÜNCHEN
MATHEMATISCHES INSTITUT

Dr. Ralf Gerkmann
Sahand Tokasi

Wintersemester 2020/21
19.02.2021

Analysis einer Variablen (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Probeklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

_____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Die reguläre Klausur enthält wie immer 8 Aufgaben. Eine der Aufgaben ist eine Multiple-Choice-Aufgabe. Sie besteht aus fünf Teilen; die 2 Punkte für einen Teil werden vergeben, wenn genau die richtige Kombination angekreuzt wird, jede falsche Kombination ergibt 0 Punkte. Negative Punkte werden nicht vergeben.

(c) Das Deckblatt und die Multiple-Choice-Aufgabe sollten nach Möglichkeit ausgedruckt und anschließend ausgefüllt werden. Falls Sie keinen Drucker zur Verfügung haben, können Sie aber auch die auszufüllenden Teile (einschließlich der ausgefüllten Multiple-Choice-Kästchen) in derselben Anordnung auf einem leeren Blatt Papier unterbringen. Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(d) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(e) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Hochladen unter Moodle zur Verfügung. Akzeptiert wird nur ein einziges, zusammenhängendes PDF-Dokument bestehend aus DIN A4-Seiten.

(f) Füllen Sie das Deckblatt bitte in Blockschrift aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(g) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(h) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (2+2+2+2+2 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Aus welcher der folgenden Aussagen kann geschlossen werden, dass $\lim_n a_n = 2$ gilt?

☒	$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \lvert a_n - 2\rvert < \varepsilon$
☒	$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \lvert a_n - 2\rvert < 2\varepsilon$
☒	$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N} : \lvert a_n - 2\rvert < \varepsilon$
☐	$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N} : 2 - \varepsilon < a_n < 2 + \varepsilon$
☒	$\exists N \in \mathbb{N} : \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \lvert a_n - 2\rvert < \varepsilon$

(b) Welche Aussagen über den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind zutreffend?

☐	Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ besitzt ein Infimum.
☐	Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ besitzt eine obere Schranke.
☐	Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ ist induktiv.
☒	Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, enthält eine rationale Zahl.
☐	Jede dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind *hinreichend* für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

☐	$\lim_n a_n = 0$	☒	$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_n < \frac{1}{n^2}$
☐	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$ und $\left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < 1$	☒	$\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$ und $\left\lvert \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\rvert < \frac{99}{100}$
☐	$\forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_{n+1} < a_n$		

(d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Welche der folgenden Aussagen sind *hinreichend* für die Stetigkeit von $f : [a, b] \to \mathbb{R}$?

☐	Die Funktion f ist beschränkt und nimmt in $[a, b]$ ihr Minimum und ihr Maximum an.
☒	Die Funktion f ist konstant.
☒	Es gibt eine stetige Funktion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lvert g(x)\rvert$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
☐	Die Funktion f ist streng monoton fallend.
☒	Die Funktion f ist in a und b stetig, und $f\lvert_{]a,b[}$ ist differenzierbar.

(e) Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

☐	Ist $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und differenzierbar, dann gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0, 1[$.
☒	Ist $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0, 1[$, dann ist f streng monoton wachsend.
☒	Ist $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ stetig und $f\lvert_{]0,1[}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0, 1[$, dann ist 0 ein globales Minimum und 1 ein globales Maximum von f.
☐	Ist $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist f beschränkt.
☐	Ist $f :]0, 1[\to \mathbb{R}$ beschränkt und differenzierbar, dann ist auch f' auf $]0, 1[$ beschränkt.

Begründungen (in der Klausur nicht erforderlich):

zu (a) Die erste Aussage ist genau die Definition der Folgenkonvergenz. Aus der zweiten Aussage kann die Folgenkonvergenz leicht hergeleitet werden. Ist nämlich $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben, dann können wir die zweite Aussage auf $\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon$ anwenden. Demnach existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - 2| < 2\varepsilon' = \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Aus der dritten Aussage folgt, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant gleich 2 ist und somit insbesondere gegen 2 konvergiert, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $|a_n - 2| < \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ist äquivalent zu $|a_n - 2| = 0$ und somit zu $a_n = 2$. Die vierte Aussage ist offenbar nicht hinreichend; beispielsweise erfüllt die Folge gegeben durch $a_n = (-1)^n$ die Bedingung $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N} : 2 - \varepsilon < a_n < 2 + \varepsilon$ (setze zum Beispiel $\varepsilon = 4$), aber diese Folge ist laut Vorlesung divergent. Die fünfte Aussage besagt, dass alle bis auf endlich viele Folgenglieder gleich 2 sind (vgl. dritte Aussage) und somit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 2 konvergiert.

zu (b) Die leere Menge ist eine Teilmenge von $\mathbb{R}^+$, und jede reelle Zahl ist eine untere Schranke von $\mathbb{R}^+$. Es gibt also keine größte untere Schranke, d.h. $\varnothing$ hat kein Infimum. Die Menge $\mathbb{R}^+$ ist bekanntlich nach oben unbeschränkt, besitzt also keine obere Schranke. Die Teilmenge $\{1\} \subseteq \mathbb{R}^+$ ist nicht induktiv, da zwar 1, aber nicht $1 + 1$ in $\mathbb{R}^+$ enthalten ist. Für die Begründung der vierten Aussage seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ vorgegeben. Laut Vorlesung bilden die rationalen Zahlen eine dichte Teilmenge der reellen Zahlen. Deshalb enthält das offene Intervall $]a, b[$ eine rationale Zahl, und diese ist offenbar auch im abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ enthalten. In der Vorlesung wurde auch gezeigt, dass die rationalen Zahlen abzählbar unendlich sind. Dies zeigt, dass nicht jede dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

zu (c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert, obwohl $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ gilt. Also ist die Bedingung $\lim_n a_n = 1$ nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Laut Vorlesung ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ eine konvergente Reihe, und aus der zweiten Aussage folgt insbesondere $|a_n| \leq \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die (absolute) Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ergibt sich somit aus dem Majorantenkriterium. Dass die dritte Bedingung nicht hinreichend für die Konvergenz der Reihe ist, haben wir bereits in der Vorlesung gesehen: Setzt man $a_n = \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt zwar $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, aber $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Dass die vierte Aussage hinreichend für die absolute Konvergenz ist, ergibt sich aus dem Quotientenkriterium. Dass die fünfte Aussage nicht hinreichend für die Konvergenz ist, sieht man wieder an der Folge gegeben durch $a_n = \frac{1}{n}$.

zu (d) Offenbar kann eine Funktion Sprungstellen haben, obwohl sie ihr Minimum und Maximum annimmt, beispielsweise die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = 0$ für $-1 \leq x < 0$ und $f(x) = 1$ für $0 \leq x \leq 1$. Deshalb ist die erste Aussage nicht hinreichend für die Stetigkeit. Konstante Funktionen sind laut Vorlesung auf ihrem gesamten Definitionsbereich stetig. Laut Vorlesung ist die Betragsfunktion stetig, und die Komposition zweier stetiger Funktionen ist ebenfalls stetig. Deshalb ergibt sich die Stetigkeit von $f(x) = |g(x)|$ aus der Stetigkeit von g. Die vierte Aussage ist kein hinreichendes Kriterium, denn auch eine streng monoton fallende Funktion kann Sprungstellen haben, beispielsweise die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = -x$ für $-1 \leq x < 0$ und $f(x) = -x - 1$ für $0 \leq x \leq 1$. Laut Vorlesung ist eine Funktion, die an einer Stelle x des Definitionsbereichs differenzierbar ist, dort auch stetig. Aus der fünften Aussage folgt also, dass f sowohl in den Punkten a und b, als auch in allen Punkten $x \in]a, b[$ stetig ist.

zu (e) Für die erste Aussage ist beispielsweise $f(x) = (x - \frac{1}{2})^3$ ein Gegenbeispiel. Diese Funktion ist streng monoton wachsend (es handelt sich um die um $\frac{1}{2}$ nach rechts verschobene Funktion $x \mapsto x^3$), aber es gilt $f'(\frac{1}{2}) = 0$. Die zweite Aussage ist gültig. Denn laut Vorlesung ergibt sich aus der Voraussetzung, dass $f|_{[c,d]}$ für alle $c, d \in \mathbb{R}$ mit $0 < c < d < 1$ streng monoton wachsend ist, und daraus folgt, dass auch f streng monoton wachsend ist. Die dritte Aussage folgt aus der Tatsache, dass f auf Grund der Voraussetzungen auf $[0, 1]$ streng monoton wachsend ist. Für die vierte Aussage ist $f(x) = \frac{1}{x}$ ein Gegenbeispiel. Ein Gegenbeispiel für die fünfte Aussage erhält man zum Beispiel durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$; die Tangente in $(x, f(x))$ geht für $x \to \sqrt[3]{x}$ in eine Senkrechte über, was bedeutet, dass der Wert der Ableitung gegen $+\infty$ geht.

Name: _____

Aufgabe 2. (3+3+4 Punkte)

Sei $A =]0,1] \cup \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Weisen Sie nach, dass A eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

(c) Bestimmen Sie Infimum und Supremum von A (jeweils mit Nachweis).

Lösung:

zu (a) Wäre A ein Intervall, dann müsste für alle $a, b \in A$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $a < x < b$ jeweils $x \in A$ gelten. Die Punkte 1 und $2 = 1 + \frac{1}{1}$ sind zwar in A enthalten, und es gilt $1 < \frac{7}{4} < 2$, aber $\frac{7}{4}$ ist kein Element der Menge A. Denn wegen $\frac{7}{4} > 1$ wäre $\frac{7}{4} \in A$ nur möglich, wenn $\frac{7}{4} = 1 + \frac{1}{n}$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt. Aber diese Gleichung kann umgeformt werden zu $\frac{3}{4} = \frac{1}{n}$ und $n = \frac{4}{3}$, was der Annahme $n \in \mathbb{N}$ widerspricht.

zu (b) Es ist 0 eine untere Schranke von A, denn für alle $x \in]0,1]$ gilt $x \geq 0$, und ebenso gilt $1 + \frac{1}{n} > 1 \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Zahl 2 ist eine obere Schranke von A, denn für alle $x \in]0,1]$ gilt $x \leq 1 \leq 2$, und ebenso gilt $1 + \frac{1}{n} \leq 1 + 1 = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}$ eine untere und eine obere Schranke besitzt, ist sie beschränkt.

zu (c) Wir haben in Teil (b) bereits festgestellt, dass 2 eine obere Schranke von A ist, und wie in Teil (a) gesehen, ist 2 in A enthalten. Insgesamt ist 2 damit das Maximum von A, und damit laut Vorlesung auch das Supremum. Nun zeigen wir noch, dass $\inf(A) = 0$ gilt. Nach Teil (b) ist 0 jedenfalls eine untere Schranke von A; zu zeigen ist noch, dass für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ ein $x \in A$ mit $x < \varepsilon$ existiert. Es genügt, diese Aussage für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon < 1$ zu verifizieren, denn dann ergibt sie sich automatisch für alle $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Sei also $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ mit $\varepsilon < 1$ und $x = \frac{1}{2}\varepsilon$. Dann gilt $x < \varepsilon$, außerdem $0 < x < 1$ und somit $x \in]0,1] \subseteq A$.

Name: _____

Aufgabe 3. (3+7 Punkte)

(a) Geben Sie Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ an, so dass die Bedingungen $\lim_n a_n = +\infty$, $\lim_n b_n = -\infty$ und $\lim_n(a_n+b_n) = 42$ erfüllt sind. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_n a_n = +\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+2}{a_n^3+3} = 0 \qquad \text{gilt.}$$

Lösung:

zu (a) Die angegebenen Bedingungen sind zum Beispiel für die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = n+42$ und $b_n = -n$ erfüllt. (Denn laut Vorlesung gilt $\lim_n b_n = -\infty$, und aus $a_n + b_n = 42$ für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt $\lim_n(a_n + b_n) = 42$. Außerdem gilt auch $\lim_n a_n = +\infty$. Ist nämlich $\kappa \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben und $N \in \mathbb{N}$ mit $N > \kappa$, dann erhalten wir für alle $n \geq N$ jeweils $a_n = n + 42 > n \geq N > \kappa$.)

zu (b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_n^2+2}{a_n^3+3} \quad = \quad \frac{\frac{1}{a_n}+\frac{2}{a_n^2}}{1+\frac{3}{a_n^3}}.$$

Zum Nachweis des angegebenen Grenzwertes sei $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ vorgegeben. Wegen $\lim_n a_n = +\infty$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 3\max\{1, \varepsilon^{-1}\}$ für alle $n \geq N$. Es folgt

$$\left|\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{2}{a_n^2}}{1+\frac{3}{a_n^3}}\right| \quad \leq \quad \frac{1}{a_n}+\frac{2}{a_n^2} \quad \leq \quad \frac{1}{a_n}+\frac{2}{a_n} \quad \leq \quad \frac{3}{a_n} \quad < \quad \frac{3}{3\varepsilon^{-1}} \quad = \quad \varepsilon$$

für alle $n \geq N$.

Name: _____

Aufgabe 4. (4+6 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie jeweils ein geeignetes Konvergenzkriterium angeben und dessen Voraussetzungen überprüfen.

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^7}{2^n} \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1}$$

Lösung:

zu (a) Nehmen wir an, die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert. Laut Vorlesung folgt daraus $\lim_n a_n = 0$. Für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existiert also ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ erfüllt ist. Setzen wir aber $\varepsilon = a_1$, dann gilt auf Grund der Voraussetzungen $|a_n| = a_n > \varepsilon$ für alle $n \geq 2$. Es existiert also kein $N \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| > \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Der Widerspruch zeigt, dass die Annahme falsch war.

zu (b)(i) Setzen wir $a_n = \frac{(n+1)^7}{2^n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt jeweils $a_n \neq 0$ und

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad = \quad \frac{(n+2)^7}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{(n+1)^7} \quad = \quad \tfrac{1}{2} \cdot (\tfrac{n+2}{n+1})^7 \quad = \quad \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{n+1}\right)^7.$$

Wegen $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$ und $\lim_n \frac{1}{n} = 0$ folgt $\lim_n \frac{1}{n+1} = 0$ aus dem Sandwich-Lemma. Wir erhalten

$$\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \quad = \quad \lim_n \tfrac{1}{2} \cdot \left(1 + \tfrac{1}{n+1}\right)^7 \quad = \quad \tfrac{1}{2} \cdot (1+0)^7 \quad = \quad \tfrac{1}{2} \quad < \quad 1.$$

Damit ergibt sich die (absolute) Konvergenz der Reihe aus dem Quotientenkriterium.

zu (b)(ii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Äquivalenz

$$\frac{n^2-1}{n^3+1} > \frac{1}{2n} \quad \Leftrightarrow \quad 2n(n^2-1) > n^3+1 \quad \Leftrightarrow \quad 2n^3-2n > n^3+1 \quad \Leftrightarrow \quad n^3 > 2n+1 \quad \Leftrightarrow \quad n > \frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3}.$$

Die letzte Ungleichung ist offenbar für alle $n \geq 3$ erfüllt, denn für diese n gilt jeweils $\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n^3} \leq 2 + 1 = 3 \leq n$. Damit ist auch die Ungleichung $\frac{n^2-1}{n^3+1} > \frac{1}{2n}$ für alle $n \geq 3$ erfüllt. Laut Vorlesung ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent, damit auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$. Die Divergenz der angegebenen Reihe folgt somit aus dem Minorantenkriterium.

Name: _____

Aufgabe 5. (4+2+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ und $f(\mathbb{R}) \supseteq [-1, 3]$.

(a) Begründen Sie, dass es Punkte $p, q \in \mathbb{R}$ mit $f(p) = \min f(\mathbb{R})$ und $f(q) = \max f(\mathbb{R})$ gibt.

(b) Begründen Sie, dass $f(p) < f(q)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{R}) = [f(p), f(q)]$ erfüllt ist.

(Beachten Sie bei der Lösung, dass Zwischenwertsatz und Maximumsprinzip in der Vorlesung nur für Funktionen auf endlichen abgeschlossenen Intervallen formuliert wurden.)

Lösung:

zu (a) Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ gibt es ein $r \in \mathbb{R}^+$, so dass $|f(x)| < 1$ und somit $-1 < f(x) < 1$ für alle $x < -r$ erfüllt ist. Wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$ existiert ein $s \in \mathbb{R}^+$, so dass $|f(x) - 2| < 1$ und somit $1 < f(x) < 3$ für alle $x > s$ gilt. Insgesamt folgt $-1 < f(x) < 3$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-r, s]$.

Die Funktion $f|_{[-s,r]}$ ist auf einem endlichen, abgeschlossenen Intervall definiert und stetig. Nach dem Maximumsprinzip gibt es deshalb Punkte $p, q \in [-r, s]$ mit $f(p) = \min f([-r, s])$ und $f(q) = \max f([-r, s])$. Wegen $[-1, 3] \subseteq \mathbb{R}$ gibt es auch Punkte p_1, q_1 mit $f(p_1) = -1$ und $f(q_1) = 3$. Wegen $-1 < f(x) < 3$ für alle $x \in \mathbb{R}\setminus[-r, s]$ folgt $p_1, q_1 \in [-r, s]$. Es folgt $f(p) = \min f([-s, r]) \leq f(p_1) = -1$ und $f(q) = \max f([-s, r]) \geq f(q_1) = 3$. Wir erhalten also sowohl $f(x) \geq f(p)$ für alle $x \in [-r, s]$ als auch $f(x) > -1 \geq f(p)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-r, s]$, insgesamt also $f(p) = \min f(\mathbb{R})$. Ebenso gilt sowohl $f(x) \leq f(q)$ für alle $x \in [-r, s]$ als auch $f(x) < 3 \leq f(q)$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus [-r, s]$, insgesamt also $f(q) = \max f(\mathbb{R})$.

zu (b) Offenbar gilt $f(p) = \min f(\mathbb{R}) \leq \max f(\mathbb{R}) = f(q)$. Wäre $f(p) = f(q)$, dann würde $\min f(\mathbb{R}) = \max f(\mathbb{R})$ folgen. Die Wertemenge $f(\mathbb{R})$ wäre also einelementig, was aber der Voraussetzung $f(\mathbb{R}) \supseteq [-1, 3]$ widerspricht.

zu (c) „$\subseteq$“ Für jedes $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) \in f(\mathbb{R})$ und somit $f(p) = \min f(\mathbb{R}) \leq f(x) \leq \max f(\mathbb{R}) = f(q)$ und somit $f(x) \in [f(p), f(q)]$. „$\supseteq$“ Sei $y \in [f(p), f(q)]$ vorgegeben. Im Fall $y \in \{f(p), f(q)\}$ gilt $y \in f(\{p, q\}) \subseteq f(\mathbb{R})$. Ansonsten gilt $f(p) < y < f(q)$, und nach dem Zwischenwertsatz, angewendet auf $f|_{[p,q]}$, existiert ein $x \in]p, q[$ mit $y = f(x)$. Auch in diesem Fall gilt also $y \in f(\mathbb{R})$.

Name: _____

Aufgabe 6. (3+4+3 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(x)^3 - 4\sin(x) + 5$ und $g(x) = |x^2 - 1|$.

(a) Begründen Sie mit Hilfe geeigneter Sätze, dass f eine stetige Funktion ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die Funktion g in den Punkten 0 und 1 stetig ist.

(c) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere stetige Funktion mit $h(0) = 5$.
Zeigen Sie, dass dann $\lim\limits_{n\to\infty} h((-1)^n \frac{1}{n}) = 5$ gilt.

Lösung:

zu (a) Sei $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $p(x) = x^3 - 4x + 5$. Dann gilt $(p \circ \sin)(x) = p(\sin(x)) = \sin(x)^3 - 4\sin(x) + 5 = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und somit $f = p \circ \sin$. Laut Vorlesung ist p als Polynomfunktion stetig, ebenso die Sinusfunktion, und f ist also Komposition stetiger Funktionen ebenfalls stetig.

zu (b) Definieren wir $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $q(x) = x^2 - 1$, dann gilt $(\mathrm{abs} \circ q)(x) = |q(x)| = |x^2 - 1| = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Laut Vorlesung ist q als Polynomfunktion stetig, ebenso die Betragsfunktion, und g ist als Komposition stetiger Funktionen stetig. Insbesondere ist g in den Punkten 0 und 1 stetig.

zu (c) Wegen $-\frac{1}{n} \leq (-1)^n \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_n \frac{1}{n} = \lim_n (-\frac{1}{n}) = 0$ gilt $\lim_n (-1)^n \frac{1}{n} = 0$ nach dem Sandwich-Lemma. Da h in 0 stetig ist, gilt $\lim_n h(x_n) = h(0) = 5$ für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ mit $\lim_n x_n = 0$. Also gilt $\lim_n h((-1)^n \frac{1}{n}) = 5$.

Name: _____

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 6 definiert durch $g(x) = |x^2 - 1|$.

(a) Zeigen Sie, dass g in den Punkten ± 1 nicht differenzierbar ist.

(b) Weisen Sie nach, dass g in 0 differenzierbar ist, und bestimmten Sie die Ableitung $g'(0)$.

Lösung:

zu (a) Wäre g in -1 differenzierbar und $c = g'(-1)$, dann müsste für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = -1$ jeweils

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(-1)}{x_n - (-1)} \quad = \quad c \qquad \text{gelten.}$$

Die Folgen $(-1+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(-1-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beiden gegen -1, und es gilt $g(-1+\frac{1}{n}) = |(-1+\frac{1}{n})^2-1| = |1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1| = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$ sowie $g(-1-\frac{1}{n}) = |(-1-\frac{1}{n})^2 - 1| = |1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1| = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Annahme folgt also

$$c \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(-1+\frac{1}{n}) - g(-1)}{(-1+\frac{1}{n}) - (-1)} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (2 - \tfrac{1}{n}) \quad = \quad 2$$

und

$$c \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(-1-\frac{1}{n}) - g(-1)}{(-1-\frac{1}{n}) - (-1)} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{(-\frac{1}{n})} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (-2 - \tfrac{1}{n}) \quad = \quad -2$$

was zum Widerspruch $2 = c = -2$ führt.

Wäre g in 1 differenzierbar und $c = g'(1)$, dann müsste für jede Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim_n x_n = 1$ jeweils

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(1)}{x_n - 1} \quad = \quad c \qquad \text{gelten.}$$

Die Folgen $(1+\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(1-\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren beiden gegen -1, und es gilt $g(1+\frac{1}{n}) = |(1+\frac{1}{n})^2 - 1| = |1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1| = \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}$ sowie $g(1-\frac{1}{n}) = |(1-\frac{1}{n})^2 - 1| = |1 - \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} - 1| = \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus der Annahme folgt also

$$c \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(1+\frac{1}{n}) - g(1)}{(1+\frac{1}{n}) - 1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n}} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (2 + \tfrac{1}{n}) \quad = \quad 2$$

und

$$c \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{g(1-\frac{1}{n}) - g(1)}{(1-\frac{1}{n}) - 1} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}}{(-\frac{1}{n})} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (-2 + \tfrac{1}{n}) \quad = \quad -2$$

was erneut Widerspruch $2 = c = -2$ führt.

zu (b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $\lim_n x_n = 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n| < 1$ für alle $n \geq N$. Es folgt $x_n^2 - 1 < 0$, also $g(x_n) = 1 - x_n^2$ und somit

$$\frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0} \quad = \quad \frac{1 - x_n^2 - 1}{x_n} \quad = \quad -x_n$$

für alle $n \geq N$. Es folgt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{g(x_n) - g(0)}{x_n - 0} \quad = \quad \lim_{n\to\infty} (-x_n) \quad = \quad -0 \quad = \quad 0.$$

Also ist g in 0 differenzierbar, und es gilt $g'(0) = 0$.

Name: _____

Aufgabe 8. (6+4 Punkte)

Sei $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 5$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f (mit Nachweis).

(b) Geben Sie Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-3 < a < b < 3$ an, so dass $f|_{[a,b]}$ streng monoton wachsend ist, und weisen Sie dies nach.

Lösung:

zu (a) Es gilt $f'(x) = 4x^3 + 4x^2 - 8x = 4x(x^2 + x - 2) = 4x(x-1)(x+2)$. Also sind -2, 0 und 1 die Nullstellen von f' in $]-3, 3[$. Weiter gilt $f''(x) = 12x^2 + 8x - 8$, also $f''(-2) = 48 - 16 - 8 = 24 > 0$, $f''(0) = -8 < 0$ und $f''(1) = 12 > 0$. Dies zeigt, dass in -2 und 1 lokale Minima und in 0 ein lokales Maximum vorliegt.

Wegen $f'(x) < 0$ für $-3 < x < -2$ ist $f|_{[-3,-2]}$ streng monoton fallend, es gilt also $f(-3) \geq f(x)$ für alle $x \in [-3, -2[$. Wegen $f'(x) > 0$ für $1 < x < 3$ ist $f|_{[1,3]}$ streng monton wachsend, es gilt also $f(3) \geq f(x)$ für alle $x \in]1, 3]$. Dies zeigt, dass auch in -3 und 3 lokale Maxima vorliegen. Die Werte $f(-3) = 14$, $f(-2) = -\frac{17}{3}$, $f(0) = 5$, $f(1) = \frac{10}{3}$ und $f(3) = 86$ zeigen, dass nur die Extrema in den Punkten -2 und 3 globale Extrema sind.

zu (b) Die Faktorisierung $f'(x) = 4x(x-1)(x+2)$ zeigt, dass $f'(x) > 0$ für $-2 < x < -1$ erfüllt ist. Setzen wir $a = -2$ und $b = -1$, dann gilt $-3 < a < b < 3$, und $f|_{[a,b]}$ ist streng monoton wachsend.