Dr. Ralf Gerkmann
Sahand Tokasi

Wintersemester 2020/21
19.02.2021

Analysis einer Variablen (LA Gym)

(Lehramt Gymnasium)

Probeklausur

Nachname: ______________________ Vorname: ______________________

Matrikelnr.: ____

Studiengang:
- ❏ Lehramt Gymnasium
- ❏ Bachelor Wirtschaftspädagogik

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Diese Daten erhalten Sie per Email.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	$\sum$
Punkte									

Hiermit erkläre ich, die Klausur eigenständig bearbeitet und während der Bearbeitungszeit keinen Kontakt zu anderen Personen aufgenommen habe.

____

(Unterschrift)

Hinweise:

(a) Die reguläre Klausur enthält wie immer 8 Aufgaben. Eine der Aufgaben ist eine Multiple-Choice-Aufgabe. Sie besteht aus fünf Teilen; die 2 Punkte für einen Teil werden vergeben, wenn genau die richtige Kombination angekreuzt wird, jede falsche Kombination ergibt 0 Punkte. Negative Punkte werden nicht vergeben.

(c) Das Deckblatt und die Multiple-Choice-Aufgabe sollten nach Möglichkeit ausgedruckt und anschließend ausgefüllt werden. Falls Sie keinen Drucker zur Verfügung haben, können Sie aber auch die auszufüllenden Teile (einschließlich der ausgefüllten Multiple-Choice-Kästchen) in derselben Anordnung auf einem leeren Blatt Papier unterbringen. Wie bei den Präsenzklausuren achten Sie bitte auch hier darauf, auf jedem Blatt **immer nur eine Aufgabe** zu bearbeiten.

(d) Als Hilfsmittel zugelassen, aber bei guter Vorbereitung nicht notwendig, sind das Skript, Lösungen von Übungsaufgaben, Lehrbücher und beliebige andere Materialien. Nicht zulässig ist die Kontaktaufnahme zu anderen Personen während der Bearbeitungszeit. Bitte denken Sie auch daran, die obige Eigenständigkeitserklärung zu unterschreiben.

(e) Nach der regulären Bearbeitungszeit von 120 Minuten stehen weitere 45 Minuten zum Einscannen (oder notfalls Fotografieren) der Klausurblätter und zum Hochladen unter Moodle zur Verfügung. Akzeptiert wird nur ein einziges, zusammenhängendes PDF-Dokument bestehend aus DIN A4-Seiten.

(f) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.

(g) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.

(h) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.

Bearbeitungszeit: 120+45 Minuten

Viel Erfolg!

Name: ______________________________

Aufgabe 1. (2+2+2+2+2 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Aus welcher der folgenden Aussagen kann geschlossen werden, dass $\lim_n a_n = 2$ gilt?

☐	$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \lvert a_n - 2\rvert < \varepsilon$
☐	$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \lvert a_n - 2\rvert < 2\varepsilon$
☐	$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N} : \lvert a_n - 2\rvert < \varepsilon$
☐	$\exists\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N} : 2-\varepsilon < a_n < 2+\varepsilon$
☐	$\exists N \in \mathbb{N} : \forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ : \forall n \in \mathbb{N}, n \geq N : \lvert a_n - 2\rvert < \varepsilon$

(b) Welche Aussagen über den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen sind zutreffend?

☐	Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ besitzt ein Infimum.
☐	Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ besitzt eine obere Schranke.
☐	Jede Teilmenge von $\mathbb{R}^+$ ist induktiv.
☐	Jedes abgeschlossene Intervall $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, enthält eine rationale Zahl.
☐	Jede dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Welche der folgenden Aussagen sind *hinreichend* für die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$?

☐ $\lim_n a_n = 0$	☐ $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_n < \frac{1}{n^2}$
☐ $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$ und $\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert < 1$	☐ $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0$ und $\left\lvert\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\rvert < \frac{99}{100}$
☐ $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < a_{n+1} < a_n$	

(d) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Welche der folgenden Aussagen sind *hinreichend* für die Stetigkeit von $f : [a,b] \to \mathbb{R}$?

☐	Die Funktion f ist beschränkt und nimmt in $[a,b]$ ihr Minimum und ihr Maximum an.
☐	Die Funktion f ist konstant.
☐	Es gibt eine stetige Funktion $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \lvert g(x)\rvert$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
☐	Die Funktion f ist streng monoton fallend.
☐	Die Funktion f ist in a und b stetig, und $f|_{]a,b[}$ ist differenzierbar.

(e) Welche der folgenden Aussagen sind zutreffend?

☐	Ist $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und differenzierbar, dann gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0,1[$.
☐	Ist $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ differenzierbar und gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0,1[$, dann ist f streng monoton wachsend.
☐	Ist $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{]0,1[}$ differenzierbar mit $f'(x) > 0$ für alle $x \in]0,1[$, dann ist 0 ein globales Minimum und 1 ein globales Maximum von f.
☐	Ist $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann ist f beschränkt.
☐	Ist $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ beschränkt und differenzierbar, dann ist auch f' auf $]0,1[$ beschränkt.

Name: ______________________________

Aufgabe 2. (3+3+4 Punkte)

Sei $A =]0,1] \cup \{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$.

(a) Zeigen Sie, dass A kein Intervall in $\mathbb{R}$ ist.

(b) Weisen Sie nach, dass A eine beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

(c) Bestimmen Sie Infimum und Supremum von A (jeweils mit Nachweis).

Name: ______________________________

Aufgabe 3. (3+7 Punkte)

(a) Geben Sie Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ an, so dass die Bedingungen $\lim_n a_n = +\infty$, $\lim_n b_n = -\infty$ und $\lim_n(a_n+b_n) = 42$ erfüllt sind. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}^+$ mit $\lim_n a_n = +\infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+2}{a_n^3+3} = 0 \qquad \text{gilt.}$$

Name: ____________________

Aufgabe 4. (4+6 Punkte)

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge in $\mathbb{R}^+$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, indem Sie jeweils ein geeignetes Konvergenzkriterium angeben und dessen Voraussetzungen überprüfen.

$$\text{(i)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^7}{2^n} \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n^3+1}$$

Name: ______________________________

Aufgabe 5. (4+2+4 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ und $f(\mathbb{R}) \supseteq [-1, 3]$.

(a) Begründen Sie, dass es Punkte $p, q \in \mathbb{R}$ mit $f(p) = \min f(\mathbb{R})$ und $f(q) = \max f(\mathbb{R})$ gibt.

(b) Begründen Sie, dass $f(p) < f(q)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $f(\mathbb{R}) = [f(p), f(q)]$ erfüllt ist.

(Beachten Sie bei der Lösung, dass Zwischenwertsatz und Maximumsprinzip in der Vorlesung nur für Funktionen auf endlichen abgeschlossenen Intervallen formuliert wurden.)

Name: ______________________________

Aufgabe 6. (3+4+3 Punkte)

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \sin(x)^3 - 4\sin(x) + 5$ und $g(x) = |x^2 - 1|$.

(a) Begründen Sie mit Hilfe geeigneter Sätze, dass f eine stetige Funktion ist.

(b) Weisen Sie nach, dass die Funktion g in den Punkten 0 und 1 stetig ist.

(c) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine weitere stetige Funktion mit $h(0) = 5$.
Zeigen Sie, dass dann $\lim_{n\to\infty} h((-1)^n \frac{1}{n}) = 5$ gilt.

Name: ____

Aufgabe 7. (6+4 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wie in Aufgabe 6 definiert durch $g(x) = |x^2 - 1|$.

(a) Zeigen Sie, dass g in den Punkten ± 1 nicht differenzierbar ist.

(b) Weisen Sie nach, dass g in 0 differenzierbar ist, und bestimmten Sie die Ableitung $g'(0)$.

Name: ______________________________

Aufgabe 8. (6+4 Punkte)

Sei $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = x^4 + \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 + 5$.

(a) Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema von f (mit Nachweis).

(b) Geben Sie Punkte $a, b \in \mathbb{R}$ mit $-3 < a < b < 3$ an, so dass $f|_{[a,b]}$ streng monoton wachsend ist, und weisen Sie dies nach.