Analysis einer Variablen

— Blatt 8 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Welche Bedingung muss nach Definition erfüllt sein, damit eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Teilfolge einer anderen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist? Geben Sie drei verschiedene Teilfolgen der Folge $(\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ an.

(b) Wie sind die Häufungspunkte einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert? Wenn $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die konstante Folge mit $a_n = a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, welche Häufungspunkte besitzt diese Folge? (Begründen Sie Ihre Antwort anhand der Definition.)

(c) Welcher Zusammenhang besteht zwischen den Häufungspunkten und den Teilfolgen einer Folge?

(d) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie anhand der Definition, dass $\limsup_n a_n = 1$ und $\liminf_n a_n = -1$ gilt.

(e) Wie ist die n-te Partialsumme s_n einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ definiert? Was bedeutet es, dass die Reihe gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert?

Aufgabe 1

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben durch $a_n = (-1)^n + \frac{1}{\sqrt{n}}$, und zeigen Sie, dass es außer den von Ihnen angegebenen keine weiteren Häufungspunkte gibt.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim_n a_n = +\infty$. Beweisen Sie, dass $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Häufungspunkte in $\mathbb{R}$ besitzt.

Aufgabe 2

Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen reeller Zahlen.

(a) Beweisen Sie die Ungleichung $\limsup_n (a_n + b_n) \leq \limsup_n a_n + \limsup_n b_n$.

(b) Finden Sie ein konkretes Beispiel für beschränkte reelle Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bei denen

$$\limsup_n (a_n + b_n) \quad < \quad \limsup_n a_n + \limsup_n b_n \qquad \text{gilt.}$$

Aufgabe 3

(a) Sei $a \in \mathbb{R}$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$, die gegen a konvergiert. Zeigen Sie, dass dann auch jede Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert.

(b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen in $\mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $a_n = b_n$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ gilt. Weisen Sie nach, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

(c) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Teil (b), und nehmen wir an, dass beide Reihen konvergieren. Gilt unter den angegebenen Voraussetzungen dann immer $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$?

Dieses Blatt wird vom 12. bis zum 15. Januar im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— **Blatt 8** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(6+4 Punkte)*

Sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{R}}$ gegeben durch

$$a_n \quad = \quad \begin{cases} -1 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ \frac{1}{n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(a) Bestimmen Sie den Limes superior und den Limes inferior von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (mit Nachweis).

(b) Bestimmen Sie (mit Nachweis) alle Häufungspunkte von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeigen Sie insbesondere, dass nicht mehr Häufungspunkte existieren als die von Ihnen angegebenen.

Aufgabe 2 *(4+4+2 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie alle Häufungspunkte der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben $n+(-1)^n\frac{1}{n}+(-1)^{n+1}n$ und zeigen Sie, dass es außer den von Ihnen angegebenen keine weiteren Häufungspunkte gibt.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\lim_n |a_n| = +\infty$. Zeigen Sie, dass diese Folge keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ besitzt.

(c) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, deren Elemente die Gleichung $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{a \in \mathbb{Q} \mid 0 < a < 1\}$ erfüllen. Weisen Sie nach, dass die Menge der Häufungspunkte dieser Folge mit dem Intervall $[0,1]$ übereinstimmt. Verwenden Sie dazu, dass die rationalen Zahlen eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ bilden.

Aufgabe 3 *(7+3 Punkte)*

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$.

(a) Zeigen Sie: Konvergieren die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$, dann konvergiert auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, und es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad = \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}.$$

(b) Gilt auch die Umkehrung, d.h. folgt aus der Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n}$? Geben Sie einen Beweis oder ein konkretes Gegenbeispiel an.

Abgabe: Donnerstag, 21. Januar 2021, 10:15 Uhr

Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.