Analysis einer Variablen

— **Blatt 5** —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Was ist eine Anordnung auf einem Körper? Was bedeutet die Aussage $x \leq y$ für Elemente x, y in einem angeordneten Körper $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$?

(b) Welche zusätzliche Eigenschaft hat eine archimedische Anordnung?

(c) Was ist eine obere Schranke für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{K}$ eines angeordneten Körpers $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$?

(d) Wie ist das Supremum einer solchen Menge definiert? Welcher Zusammenhang besteht zwischen Maximum und Supremum?

Aufgabe 1

Beweisen Sie, dass ein angeordneter Körper $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ genau dann archimedisch angeordnet ist, wenn es kein $a \in \mathbb{K}$ mit $a \geq n_{\mathbb{K}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt.

Aufgabe 2

Wir betrachten die folgenden beiden Teilmengen von $\mathbb{R}$.

$$A \quad = \quad]1,2] \cup]3,4] \qquad , \qquad B \quad = \quad \{\tfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

(a) Skizzieren Sie die Lage der beiden Mengen auf dem Zahlenstrahl.

(b) Bestimmen Sie die Mengen $\mathcal{S}^+(A)$, $\mathcal{S}^+(B)$, $\mathcal{S}^-(A)$ und $\mathcal{S}^-(B)$ der oberen und unteren Schranken (jeweils mit Nachweis).

(c) Geben Sie Minimum, Maximum, Supremum und Infimum der Mengen A und B an, sofern diese existieren, und begründen Sie Ihr Ergbenis.

(d) Untersuchen Sie, ob es sich bei A und B um Intervalle handelt.

Aufgabe 3

(a) Sei $M \subseteq \mathbb{R}$ eine nichtleere beschränkte Menge. Zeigen Sie, dass es Zahlen $c, d \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\mathcal{S}^-(M) =]-\infty, c]$ und $\mathcal{S}^+(M) = [d, +\infty[$ erfüllt ist.

(b) Sei $N \subseteq \mathbb{R}$ eine weitere nichtleere beschränkte Menge und $M + N = \{m + n \mid m \in M, n \in N\}$. Beweisen Sie, dass $\sup(M + N)$ existiert und $\sup(M + N) = \sup(M) + \sup(N)$ gilt.

Dabei darf verwendet werden, dass $\mathbb{R}$ ein vollständiger angeordneter Körper ist.

Dieses Blatt wird vom 8. bis zum 11. Dezember im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— **Blatt 5** —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(5+5 Punkte)*

Sei $(\mathbb{K}, \mathbb{K}^+)$ ein angeordneter Körper.

(a) Sei $a \in \mathbb{K}$ mit $0 \leq a \leq \varepsilon$ für alle $\varepsilon \in \mathbb{K}^+$. Zeigen Sie, dass daraus $a = 0_{\mathbb{K}}$ folgt.

(b) Zeigen Sie, dass die Anordnung $\mathbb{K}^+$ genau dann archimedisch ist, wenn für jedes $a \in \mathbb{K}_+$ aus den Ungleichungen $0 \leq a \leq n_{\mathbb{K}}^{-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ jeweils $a = 0_{\mathbb{K}}$ folgt.

Aufgabe 2 *(3+7 Punkte)*

Wir betrachten die folgenden beiden Teilmengen der reellen Zahlen.

$$A = [0,4] \setminus \{1,2,3\} \quad , \quad B = [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \cap \mathbb{Q} \quad , \quad C = \{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass keine dieser Mengen ein Intervall ist.

(b) Bestimmen Sie für alle drei Mengen Minimum, Maximum, Supremum und Infimum, sofern diese existieren (jeweils mit Nachweis).

Dabei darf verwendet werden, dass $\mathbb{Q}$ eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, dass also jedes offene Intervall $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$ ein Element aus $\mathbb{Q}$ enthält.

Aufgabe 3 *(5+5 Punkte)*

Seien M, N beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ mit $M \cap N \neq \varnothing$.

(a) Zeigen Sie, dass $\sup(M \cap N)$ in $\mathbb{R}$ existiert, und beweisen Sie die Ungleichung $\sup(M \cap N) \leq \min\{\sup(M), \sup(N)\}$. Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die beiden Werte im Allgemeinen nicht gleich sind.

(b) Weisen Sie nach, dass jede nichtleere, endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$ ein Minimum und ein Maximum besitzt.

Dabei darf verwendet werden, dass $\mathbb{R}$ ein vollständiger angeordneter Körper ist.

Abgabe: Donnerstag, 17. Dezember 2020, 10:15 Uhr
Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.