Analysis einer Variablen

— Blatt 3 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 (Vorbereitung auf das Tutorium)

- (a) Sei $f : X \rightarrow Y$ eine injektive Abbildung. Begründen Sie mit einem geeigneten Satz aus der Vorlesung, dass es dann eine surjektive Abbildung $g : Y \rightarrow X$ gibt.
- (b) Sei A eine endliche Menge der Mächtigkeit $|A| = 42$. Zeigen Sie, dass es für jedes $n \leq 42$ eine injektive Abbildung $M_n \rightarrow A$ und für jedes $n \geq 42$ eine surjektive Abbildung $M_n \rightarrow A$ gibt. Begründen Sie auch, dass es keine bijektive Abbildung $A \rightarrow M_{43}$ gibt.
- (c) Sei $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ gegeben durch $f(n) = n^2$. Geben Sie für jedes $r \in \mathbb{Z}$ die Urbildmenge $f^{-1}(\{r\})$ an. Gibt es Teilmengen $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ mit $A \neq B$, aber $f(A) = f(B)$?

Aufgabe 1

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y, g : Y \rightarrow Z$ Abbildungen. Beweisen Sie:

- (a) Ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ injektiv, dann ist auch f injektiv.
- (b) Ist $g \circ f : X \rightarrow Z$ surjektiv, dann ist auch g surjektiv.

Aufgabe 2

Sei $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.

- (a) Zeigen Sie, dass für alle $C, D \subseteq Y$ jeweils $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$ gilt.
- (b) Zeigen Sie anhand eines konkreten Gegenbeispiels, dass die Gleichung $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$ im Allgemeinen nicht für alle $A, B \subseteq X$ erfüllt ist.

Aufgabe 3

- (a) Seien A und B nichtleere endliche Mengen, $a \in A, b \in B$ sowie $A' = A \setminus \{a\}$ und $B' = B \setminus \{b\}$. Zeigen Sie: Ist $f : A \rightarrow B$ eine bijektive Abbildung mit $f(a) = b$, dann ist $f|_{A'}$ eine bijektive Abbildung zwischen A' und B' .
- (b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$: Gilt $|A| = |B| = n$, dann gibt es genau $n!$ bijektive Abbildungen $A \rightarrow B$.

Hinweis: Im Induktionsschritt seien A und B Mengen mit $|A| = |B| = n + 1$. Sei $a \in A$ fest gewählt. Zeigen Sie mit der Induktionsvoraussetzung und Teil (a), dass es für jedes $b \in B$ jeweils genau $n!$ bijektive Abbildungen $f : A \rightarrow B$ mit $f(a) = b$ gibt.

Dieses Blatt wird vom 24. bis zum 27. November im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— Blatt 3 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Beweisen Sie, dass $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ überabzählbar ist.

Hinweis: Angenommen, $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ist eine bijektive Abbildung. Betrachten Sie in $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ das Element $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin \phi(n)\}$. Für ein $n_0 \in \mathbb{N}$ muss dann $\phi(n_0) = D$ gelten. Versuchen Sie, daraus einen Widerspruch herzuleiten.

Aufgabe 2 (3+3+4 Punkte)

Seien X, Y, Z Mengen und $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$ zwei Abbildungen.

- (a) Beweisen Sie für jede Teilmenge $A \subseteq X$ und jede Teilmenge $C \subseteq Z$ die Gleichungen $(g \circ f)(A) = g(f(A))$ und $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$.
- (b) Untersuchen Sie, ob die Gleichung $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ für alle Teilmengen $A, B \subseteq X$ gilt.
- (c) Zeigen Sie: Ist f injektiv, dann gilt $f^{-1}(f(A)) = A$ für jede Teilmenge $A \subseteq X$.
Ist f surjektiv, dann gilt $f(f^{-1}(B)) = B$ für jede Teilmenge $B \subseteq Y$.

Aufgabe 3 (6+4 Punkte)

- (a) Seien X und Y endliche Mengen mit $|X| = |Y|$ und $f : X \rightarrow Y$ eine Abbildung.
Beweisen Sie die Äquivalenzen

$$f \text{ ist injektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv} \Leftrightarrow f \text{ ist bijektiv.}$$

- (b) Zeigen Sie anhand konkreter Gegenbeispiele, dass für gleichmächtige unendliche Mengen im Allgemeinen weder die erste noch die zweite Äquivalenz erfüllt ist.

Abgabe: Donnerstag, 3. Dezember 2020, 10:15 Uhr

Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.