Analysis einer Variablen

— Blatt 2 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

- (a) Welche fünf Mengenoperationen wurden in der Vorlesung eingeführt?
- (b) Wenn man eine Aussage der Form $\forall x \in \mathbb{N} : \varphi$ durch vollständige Induktion bewiesen werden soll, was muss dann gezeigt werden? Was für ein Ausdruck ist φ in dieser Situation?
- (c) Was ist eine Relation auf einer Menge X ?
- (d) Welche Bedingungen muss eine solche Relation erfüllen, damit sie eine Halbordnung auf X ist?
- (e) Welche Bedingungen muss eine Relation zwischen zwei Mengen X und Y erfüllen, damit sie eine Abbildung zwischen X und Y ist?
- (f) Geben Sie je ein Beispiel für eine Abbildung $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ an, die (i) injektiv, aber nicht surjektiv ist (ii) surjektiv, aber nicht injektiv ist (iii) bijektiv, aber ungleich $\text{id}_{\mathbb{R}^+}$ ist. Dabei bezeichnet $\mathbb{R}^+$ die Menge der positiven reellen Zahlen, also die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $x > 0$.

Aufgabe 1

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- (a) $\{\{1, 2\}\} = \{\{1\}, \{2\}\}$
- (b) $A \cup \emptyset = A \cup \{\emptyset\}$ für jede Menge A
- (c) $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ für beliebige Mengen A, B
- (d) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subseteq \mathcal{P}(B)$ für beliebige Mengen A, B

Aufgabe 2

Beweisen Sie die folgende Aussage durch vollständige Induktion: „Für jede natürliche Zahl n ist die Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen gleich n^2 .“

Aufgabe 3

- (a) Seien A und B zwei Mengen, $\leq_A$ eine Halbordnung auf A und $\leq_B$ eine Halbordnung auf B . Zeigen Sie, dass die Relation $\leq$ auf $A \times B$ gegeben durch

$$\leq = \{((a, b), (a', b')) \in (A \times B)^2 \mid (a \leq_A a') \wedge (b \leq_B b')\}$$

eine Halbordnung auf $A \times B$ ist.

- (b) Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Abbildungen. Zeigen Sie, dass durch die Relation

$$h = \{(x, z) \in \mathbb{R}^2 \mid \exists y, y' \in \mathbb{R} : ((x, y) \in f) \wedge ((x, y') \in g) \wedge (z = y + y')\}$$

eine Abbildung mit Definitions- und Bildbereich $\mathbb{R}$ gegeben ist.

- (c) Nehmen wir an, dass f und g beides injektive Abbildungen sind. Ist dann auch h immer injektiv? Beweisen Sie dies, oder geben Sie konkretes Gegenbeispiel an (und weisen Sie nach, dass Ihr Beispiel die allgemeine Aussage tatsächlich widerlegt).

Dieses Blatt wird vom 17. bis zum 20. November im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— Blatt 2 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 (2+2+2+2+2 Punkte)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind, und begründen Sie Ihre Entscheidung.

- (a) $\emptyset \times A = \emptyset$ für jede Menge A
- (b) $(a = c) \wedge (b = d) \Leftrightarrow \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\}$ für beliebige Objekte a, b, c, d
- (c) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$
- (d) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ für beliebige Mengen A, B
- (e) $\mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ für beliebige Mengen A, B

Aufgabe 2 (5+5 Punkte)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen durch vollständige Induktion.

- (a) „Für jede natürliche Zahl n ist die Summe der ersten n Quadratzahlen $1^2, 2^2, 3^2, \dots, n^2$ gleich $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.“

- (b) „Jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}$ besitzt ein kleinstes Element.“

Anleitung: Nehmen Sie an, $A \subseteq \mathbb{N}$ ist eine nichtleere Teilmenge, die *kein* kleinstes Element besitzt. Betrachten Sie dann die Aussage $\forall x \in \mathbb{N} : A \cap \{1, 2, \dots, x\} = \emptyset$.

Aufgabe 3 (4+6 Punkte)

Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Man sagt, f ist *streng monoton wachsend* bzw. *streng monoton fallend*, wenn für alle $x, y \in [0, 1]$ mit $x < y$ jeweils $f(x) < f(y)$ bzw. $f(x) > f(y)$ gilt.

- (a) Zeigen Sie: Ist f injektiv und weder streng monoton wachsend noch streng monoton fallend, dann gibt es $a, b, c \in [0, 1]$ mit $a < b < c$, so dass entweder $f(b) > f(a)$ und $f(b) > f(c)$ oder $f(b) < f(a)$ und $f(b) < f(c)$ erfüllt ist.
- (b) Der *Zwischenwertsatz* aus der Analysis besagt: Sind $a, c \in [0, 1]$ mit $a < c$, und ist f stetig, so gibt es für jeden Wert $d \in \mathbb{R}$, der zwischen $f(a)$ und $f(c)$ liegt, ein $b \in [0, 1]$ mit $a < b < c$ und $f(b) = d$. Zeigen Sie: Ist $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv, dann ist entweder streng monoton wachsend oder streng monoton fallend.

Zur Erläuterung: Wir sagen, $d \in \mathbb{R}$ liegt *zwischen* $f(a)$ und $f(c)$, wenn im Fall $f(a) < f(c)$ die Bedingung $f(a) < d < f(c)$ erfüllt ist, und im Fall $f(a) > f(c)$ die Bedingung $f(a) > d > f(c)$. Im Fall $f(a) = f(c)$ gibt es keine Werte zwischen $f(a)$ und $f(c)$.

Abgabe: Donnerstag, 26. November 2020, 10:15 Uhr

Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.