Analysis einer Variablen

— Blatt 11 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Wie ist die Ableitung einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem inneren Punkt a des Definitionsbereichs D definiert? Warum ist es sinnvoll zu fordern, dass a ein innerer Punkt von D ist?

(b) Wie kann man die Differenzierbarkeit einer Funktion in einem Punkt nachweisen?

(c) Wie geht man vor, um zu zeigen, dass eine Funktion an einer Stelle ihres Definitionsbereichs *nicht* differenzierbar ist?

Aufgabe 1

(a) Berechnen Sie die Ableitung der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3$ in jedem Punkt direkt anhand der Definition, d.h. ohne die Verwendung von Ableitungsregeln.

(b) Beweisen Sie mit Hilfe von Lemma (12.19) und der Restgliedabschätzungen aus Lemma (12.18), dass $\sin'(x) = \cos(x)$ und $\cos'(x) = -\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x - 1|$.

(a) Zeigen Sie, dass f in 1 nicht differenzierbar ist.

(b) Weisen Sie nach, dass f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ differenzierbar ist, und geben Sie die Ableitung $f'(a)$ an.

Aufgabe 3

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Wir bezeichnen eine Funktion $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ als *rechtsseitig differenzierbar* im Punkt a, wenn der Grenzwert

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

in $\mathbb{R}$ existiert; wir bezeichnen diesen dann als *rechtsseitige Ableitung* der Funktion. Entsprechend nennen wir $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ eine in b *linksseitig differenzierbare* Funktion, wenn

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

als eigentlicher Grenzwert existiert, und bezeichnen diesen Grenzwert als *linkssseitige Ableitung* der Funktion f. Zeigen Sie, dass eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ genau dann in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbar ist, wenn $f|_{[a,+\infty[}$ in a rechtsseitig und $f|_{]-\infty,a]}$ in a linksseitig differenzierbar ist und links- und rechtsseitige Ableitung übereinstimmen.

Dieses Blatt wird vom 2. bis zum 5. Februar im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— Blatt 11 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(4+6 Punkte)*

Sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) \quad = \quad \begin{cases} -x^2 & \text{falls } x < 0 \\ x^3 & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, und geben Sie die Ableitungsfunktion an.

(b) Weisen Sie nach, dass die Ableitungsfunktion f' in 0 zwar stetig, aber nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 2 *(3+3+4 Punkte)*

(a) Bestimmen Sie die Ableitung der folgenden Funktionen

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \ln(\ln(x^2 + x + 1)) \qquad , \qquad g :]0, 1[\to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto \exp(-x)\frac{1 - x^2}{x + 5} \qquad ,$$

$$h :]1, +\infty[\to \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto x^x.$$

(b) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion des Arkus tangens mit Hilfe der Umkehrregel.

(c) Gegeben sei die Funktion $j : [3, 6] \to [11, 179]$, $x \mapsto x^3 - 7x + 5$. Ohne Beweis darf verwendet werden, dass j streng monoton wachsend und bijektiv ist. Bestimmen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion $j^{-1} : [11, 179] \to [3, 6]$ an den Stellen $j(4) = 41$ und $j(5) = 95$.

Aufgabe 3 *(5+5 Punkte)*

Wir betrachten die beiden Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass f im Nullpunkt unstetig, in jedem anderen Punkt aber stetig ist.

(b) Untersuchen Sie, ob g im Nullpunkt stetig bzw. differenzierbar ist.

Abgabe: Donnerstag, 11. Februar 2021, 10:15 Uhr

Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.