Analysis einer Variablen

— Blatt 10 —

(Tutoriumsblatt)

Aufgabe 0 *(Vorbereitung auf das Tutorium)*

(a) Was besagen Zwischenwertsatz und Maximumsprinzip?

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(0) = -2$ und $f(3) = 2$. Welche Information liefert der Zwischenwertsatz über den Wertebereich $f(\mathbb{R})$ der Funktion?

(c) Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f([0,5]) = [2, +\infty[$?

(d) Wie ist der Konvergenzbereich einer Potenzreihe definiert?

(e) Welche Angaben lassen sich anhand des Konvergenzradius über den Konvergenzbereich einer Potenzreihe machen?

(f) Gibt es eine reelle Potenzreihe, die in allen Punkten der Menge $[0,1] \cup [2,3]$ konvergiert, aber in keinem einzigen Punkt außerhalb dieser Menge?

Aufgabe 1

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 2x^2 - 3x - 1$.

(a) Zeigen Sie mit dem Zwischenwertsatz, dass f mindestens zwei verschiedene Nullstellen besitzt. *Anleitung:* Berechnen Sie zunächst die Funktionswerte $f(-1)$, $f(1)$ und $f(2)$.

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $f(\mathbb{R})$ ein Minimum $c \in \mathbb{R}$ besitzt.

(c) Beweisen Sie die Gleichung $f(\mathbb{R}) = [c, +\infty[$.

Aufgabe 2

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ stetig und monoton fallend. Zeigen Sie, dass folgende beiden Aussagen äquivalent sind.

(i) f ist surjektiv.

(ii) Es gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ und $\lim\limits_{x \to b} f(x) = -\infty$.

Aufgabe 3

(a) Beweisen Sie für alle $p \in \mathbb{N}$ die Grenzwerte

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp(x)}{x^p} = +\infty \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt[p]{x}} = 0.$$

Hinweis: Für den ersten Grenzwert betrachten Sie die ersten $p + 2$ Terme der Exponentialreihe.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\ln(n)/n} x^n$.

Dieses Blatt wird vom 25. bis zum 28. Januar im Tutorium bearbeitet.

Analysis einer Variablen

— Blatt 10 —

(Globalübungsblatt)

Aufgabe 1 *(3+4+3 Punkte)*

Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^3 + x^2 - 2x - 2$.

(a) Zeigen Sie, dass f mindestens drei verschiedene Nullstellen besitzt.

(b) Beweisen Sie die Gleichung $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(c) Sei $A = \,]-\infty, -1[$. Zeigen Sie, dass die Menge $f(A)$ ein Maximum $c \in \mathbb{R}$ besitzt, und dass die Gleichung $f(A) = \,]-\infty, c]$ gilt.

Aufgabe 2 *(4+3+3 Punkte)*

Seien die Funktionen $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\sinh(x) = \tfrac{1}{2}(\exp(x) - \exp(-x)) \qquad \text{und} \qquad \cosh(x) = \tfrac{1}{2}(\exp(x) + \exp(-x)).$$

Man bezeichnet sie als *Sinus hyperbolicus* bzw. *Kosinus hyperbolicus*.

(a) Bestimmen Sie die Grenzwerte von sinh und cosh für $x \to -\infty$ und $x \to +\infty$.

(b) Zeigen Sie, dass durch sinh eine Bijektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und durch cosh eine Bijektion zwischen $[0, +\infty[$ und $[1, +\infty[$ definiert ist. Dabei darf ohne Beweis verwendet werden, dass beide Funktionen auf $[0, +\infty[$ streng monoton wachsend sind. (Dies kann durch Differentiation leicht gezeigt werden, was wir aber hier noch nicht verwenden wollen.)

(c) Zeigen Sie, dass die Umkehrfunktionen $\operatorname{arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\operatorname{arcosh} : [1, +\infty[\,\to [0, +\infty[$ von sinh und cosh durch $\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ und $\operatorname{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ gegeben sind. Man bezeichnet sie als *Areasinus hyperbolicus* und *Areakosinus hyperbolicus.*

Aufgabe 3 *(5+5 Punkte)*

(a) Seien $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$ und $g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-a)^n$ zwei Potenzreihen jeweils mit Entwicklungspunkt $a \in \mathbb{R}$ und Konvergenzradien ρ bzw. σ. Zeigen Sie: Gilt $|a_n| \le r|b_n|$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$ und eine Konstante $r \in \mathbb{R}^+$, dann folgt $\rho \ge \sigma$.

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden beiden Potenzreihen.

$$\text{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} (n^4 - 4n^3)x^n \qquad \qquad \text{(ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \cosh(n) x^n$$

Abgabe: Donnerstag, 4. Februar 2021, 10:15 Uhr
Bitte geben Sie auf jeder Abgabe die Nummer Ihrer Übungsgruppe an.