



Dr. Ralf Gerkmann

Wintersemester 2024/25
14.04.2025

Algebra

(Wiederholungsklausur alte Studienordnung)

Nachschreibklausur

Nachname: _____ Vorname: _____

Matrikelnr.: _____

Ihr Klausurergebnis können Sie auf der Vorlesungshomepage mit Hilfe eines Benutzernamens, eines Passworts und einer vierstelligen Identifikationsnummer abrufen, die Ihnen persönlich zugeordnet ist. Sie erhalten diese Daten während der Klausur.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Σ
Punkte									

Hinweise:

- (a) Bitte überprüfen Sie, ob Sie **neun Blätter** (Deckblatt + 8 Aufgaben) erhalten haben.
- (b) Für die Klausur sind **keine Hilfsmittel** (z.B. Skripten, handschriftliche Notizen, Taschenrechner) zugelassen.
- (c) Schreiben Sie keine Lösungen zu unterschiedlichen Aufgaben auf dasselbe Blatt.
- (d) Füllen Sie das Deckblatt bitte in BLOCKSCHRIFT aus. Schreiben Sie auf **jedes Blatt** Ihren **Vor- und Nachnamen**.
- (e) Bitte denken Sie daran, jeden Schritt Ihrer Lösung zu begründen und explizit darauf hinzuweisen, wenn Sie Ergebnisse aus der Vorlesung verwenden. Die Verwendung von Ergebnissen aus Übungsaufgaben ist **nicht** zulässig.
- (f) Bitte achten Sie darauf, dass Sie zu jeder Aufgabe nur eine Lösung abgeben; streichen Sie deutlich durch, was nicht gewertet werden soll.
- (g) Bei Bedarf kann zusätzliches Schreibpapier angefordert werden. Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter.

Bearbeitungszeit: 120 Minuten

Viel Erfolg!

Name: _____

Aufgabe 1. (3+4+3 Punkte)

Sei G eine zyklische Gruppe der Ordnung 12 und $g \in G$ ein Element mit $G = \langle g \rangle$. Sei $N = \langle g^4 \rangle$.

- (a) Begründen Sie, dass $N \trianglelefteq G$ gilt, und bestimmen Sie die Ordnungen von N und G/N .
- (b) Zeigen Sie, dass $R = \{e, g, g^2, g^3\}$ ein Repräsentantensystem von G/N ist.
- (c) Begründen Sie, dass $G \cong \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$, $N \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ und $G/N \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt.

Name: _____

Aufgabe 2. (2+3+5 Punkte)

Sei $G = (\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}, +)$, und sei $\phi : G \rightarrow \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ die Abbildung definiert durch $\phi(a + 16\mathbb{Z}) = a + 4\mathbb{Z}$ für alle $a \in \mathbb{Z}$.

- (a) Zeigen Sie, dass ϕ ein Gruppenhomomorphismus ist.
- (b) Weisen Sie nach, dass ϕ surjektiv ist.
- (c) Zeigen Sie, dass ein Isomorphismus $G/\langle 4 + 16\mathbb{Z} \rangle \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ von Gruppen existiert.

Name: _____

Aufgabe 3. (4+3+3 Punkte)

- (a) Geben Sie ein $r \in \mathbb{N}$ und Gruppen $G_1, \dots, G_r$ an, so dass jede abelsche Gruppe der Ordnung 24 zu genau einer dieser Gruppen G_j mit $1 \leq j \leq r$ isomorph ist. Ein Nachweis ist hier *nicht* erforderlich.
- (b) Begründen Sie, dass die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ nicht zu $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ isomorph ist.
- (c) Geben Sie zwei nicht abelsche, nicht zueinander isomorphe Gruppen der Ordnung 24 an (mit Nachweis).

Name: _____

Aufgabe 4. (4+3+3 Punkte)

Sei $G = \mathbb{R}^\times$ mit der Multiplikation als Verknüpfung und $X = \mathbb{R}^3$.

- (a) Zeigen Sie, dass durch $\cdot : G \times X \rightarrow X$, $(a, v) \mapsto av$ eine Gruppenoperation von G auf X definiert ist.
- (b) Bestimmen Sie die Stabilisatorgruppen $G_{(0,0,0)}$ und $G_{(1,1,0)}$ (jeweils mit Nachweis).
- (c) Bestimmen Sie die Bahn $G((1, 1, 0))$, und begründen Sie, dass die Operation nicht transitiv ist.

Name: _____

Aufgabe 5. (4+3+3 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 2023. (Es ist $2023 = 7 \cdot 17^2$.)

- (a) Zeigen Sie, dass G Normalteiler P und Q der Ordnung 7 bzw. 289 besitzt.
- (b) Weisen Sie nach, dass $G \cong P \times Q$ gilt.
- (c) Begründen Sie, dass G eine abelsche Gruppe ist.

Name: _____

Aufgabe 6. (4+4+2 Punkte)

Sei $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mit $\alpha^5 = 4\alpha + 2$ und $\beta^7 = 49\beta + 21$.

- (a) Bestimmen Sie die Erweiterungsgrade $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$, $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\alpha, \beta) : \mathbb{Q}]$ (jeweils mit Nachweis).
- (b) Bestimmen Sie, ebenfalls mit Nachweis, den Grad der Erweiterung $\mathbb{Q}(\alpha, \beta, \sqrt{-3})|\mathbb{Q}$.
- (c) Begründen Sie, dass kein $\mathbb{Q}$ -Homomorphismus $\phi : \mathbb{Q}(\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{Q}$ existiert.

Name: _____

Aufgabe 7. (2+4+4 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_2^{\text{alg}}$ ein algebraischer Abschluss des Körpers $\mathbb{F}_2$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathbb{F}_{2^n}$ der eindeutig bestimmte Zwischenkörper von $\mathbb{F}_2^{\text{alg}}|\mathbb{F}_2$ mit 2^n Elementen.

- (a) Bestimmen Sie die Anzahl der Teilkörper von $\mathbb{F}_{64}$.
- (b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente $\alpha \in \mathbb{F}_{16}^\times$ mit $\langle \alpha \rangle = \mathbb{F}_{16}^\times$.
- (c) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in $\mathbb{F}_4 \cup \mathbb{F}_8$.

Name: _____

Aufgabe 8. (4+3+3 Punkte)

Sei $\alpha = \sqrt{4 + 5\sqrt{2}}$.

- (a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom des Elements α über $\mathbb{Q}$ (mit Nachweis).
- (b) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von α über $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Hier ist *kein* Nachweis erforderlich.
- (c) Begründen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha)|\mathbb{Q}$ keine normale Erweiterung ist.