Erinnerung

(i) geg. Gruppe G, $S \subseteq G$

Normalisator von S in G

$$N_G(S) = \{ g \in G \mid gSg^{-1} = S \}$$

Ist $U \leq G$, dann gilt $U \trianglelefteq N_G(U)$

insb. also $U \trianglelefteq G \Longleftrightarrow N_G(U) = G$.

Für jede Teilmenge S ist $N_G(S)$ stets eine Untergruppe von G

Für jede Teilmenge S ist $N_G(S)$ stets

(ii) geg. Gruppe G, Teilmengen $A, B \subseteq G$

<u>Komplexprodukt</u> $AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$

Sind $U, V \leq G$, und ist zumindest eine der Untergruppen Normalteiler, dann ist auch UV eine Untergruppe von G.

Nachtrag zu H25T2A2:

weitere Möglichkeit zum Nachweis der Untergruppen-Eigenschaft von $U = \{A^k B^l \mid 0 \leq k \leq 3, l \in \{0,1\}\}$ Setze als bereits bekannt voraus,

$0 \le k, l \le 3 \}$ ist Untergr. von G, außerdem: $U = V$

„$\subseteq$" offensichtlich „$\supseteq$" Sei $C \in V$, $C = A^k B^l$, o.B.d.A.

dass $\operatorname{ord}(A) = 4$, $\operatorname{ord}(B) = 4$ gilt

$\Rightarrow \langle A \rangle = \{A^k \mid 0 \le k \le 3\}$, $\langle B \rangle = \{B^l \mid 0 \le l \le 3\}$.

Beh: $N_G(\langle A \rangle) = G$ für $G = \langle A, B \rangle$

Da $N_G(\langle A \rangle) \le G$, genügt es zu überprüfen, dass $A, B \in N_G(\langle A \rangle)$. Aus $A \in \langle A \rangle$ folgt unmittelbar $A \in N_G(\langle A \rangle)$. $BAB^{-1} = A^3$. Da die Konjugation mit B ein Automorphismus von G ist, folgt $BA^kB^{-1} = (BAB^{-1})^k = (A^3)^k = A^{3k} \in \langle A \rangle$

$\Rightarrow B\langle A \rangle B^{-1} \subseteq \langle A \rangle$

Wegen $B^{-1} = B^3$ gilt auch $B^{-1}\langle A\rangle B =$
$B^3\langle A\rangle B^{-3} \subseteq \langle A\rangle$ (dreimalige Konj. mit B)
$\Rightarrow \langle A\rangle \subseteq B\langle A\rangle B^{-1}$ insg.: $B\langle A\rangle B^{-1} = \langle A\rangle$
$\Rightarrow B \in \langle A\rangle$ ($\Rightarrow$ Beh.)

Beh. $\Rightarrow$ $\langle A\rangle \trianglelefteq G \Rightarrow V = \langle A\rangle\langle B\rangle = \{A^k \cdot B^l \mid$
$0 \le k, l \le 3\}$ ist Untergr. von G, außerdem: $U = V$
„$\subseteq$" offensichtlich „$\supseteq$" Sei $C \in V$, $C = A^k B^l$, o.B.d.A.
$0 \le k \le 3$, $l \in \{2,3\}$ $\xrightarrow{A^2 = B^2}$ $C = A^{k+2} B^{l-2} \Rightarrow C \in \langle A\rangle \cdot$
$\{B^0, B^1\} \Rightarrow C \in U$. Mit V ist also U eine

Untergruppe von G.

Beh. $G = U$ „$\supseteq$" klar

„$\subseteq$" $A, B \in U$, $U \leq G \Rightarrow G = \langle A, B \rangle$
$\subseteq U$ $\square$

Def. (induzierter Homomorphismus)

Ist $\phi: G \to H$ ein Gruppenhom
und $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq \ker(\phi)$, dann
ex. ein eind. bestimmter Hom $\bar{\phi}: G/N$
$\to H$ mit $\bar{\phi}(gN) = \phi(g)\ \forall g \in G$.
der sog. durch ϕ induzierte Hom

Hz
und
H =
Ohne
Gru
(a)
ein
φ: (
für a
Hinweis
nebenstel

Homomorphiesatz für Gruppen:

Sei $\phi : G \to H$ ein Gruppenhom. und $N = \ker(\phi)$. Dann liefert der induzierte Hom. einen Isomorphismus zwischen G/N und $\mathrm{im}(\phi)$.

H23T3A1 (b) Sei G eine Gruppe und $H \leq G$. Zeigen Sie, dass $(G:H)$ ein Teiler von 168 ist, falls H der Kern eines Homomorphismus $\phi : G \to GL_3(\mathbb{F}_2)$ ist.

Auf Grund der Voraussetzungen liefert uns der Homomorphiesatz einen Isom.

$$G/H \cong \mathrm{im}(\phi) \Rightarrow (G:H) = |\mathrm{im}(\phi)|$$

Es genügt also z.zg., dass $|\mathrm{im}(\phi)|$ ein Teiler von 168 ist. Bekanntlich ist $|GL_3(\mathbb{F}_2)|$ gleich der Anzahl der linear unabh. Tupel (v_1, v_2, v_3) mit $v_j \in \mathbb{F}_2^3$, denn eine Matrix $A \in M_{3,\mathbb{F}_2}$ ist genau dann invertierbar, wenn ihre Spaltenvektoren linear unabh. sind. Für die Wahl von v_1 gibt es $|\mathbb{F}_2^3 \setminus \{0_{\mathbb{F}_2^3}\}| = 8 - 1 = 7$ Möglichkeiten, danach noch $|\mathbb{F}_2^3 \setminus \langle v_1 \rangle_{\mathbb{F}_2}| = 8 - 2 = 6$ Mögl. für v_2, und $|\mathbb{F}_2^3 \setminus \langle v_1, v_2 \rangle_{\mathbb{F}_2}| = 8 - 4 = 4$ Mögl. für v_3 $\Rightarrow |GL_3(\mathbb{F}_2)| = 7 \cdot 6 \cdot 4 = 168$

Da $\mathrm{im}(\phi)$ eine Untergr. von $GL_3(\mathbb{F}_2)$ ist, ist $|\mathrm{im}(\phi)|$ nach dem Satz von Lagrange ein Teiler von $|GL_2(\mathbb{F}_3)| = 168$ $\square$

H22 T1 A1 Sei $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in M_{2,\mathbb{Q}} \mid ac \neq 0 \right\}$, und seien $H, U \leq G$ definiert durch

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid a = c \right\}, \quad U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid b = 0 \right\}.$$

Ohne Beweis darf verwendet werden, dass G eine Gruppe (eine Untergr. von $GL_2(\mathbb{Q})$) ist.

(a) Zeigen Sie, dass $H \trianglelefteq G$ gilt, und dass ein wohldefinierter Isomorphismus

$$\varphi : G/H \to \mathbb{Q}^\times \text{ mit } \varphi\left(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right]\right) = \frac{a}{c}$$

für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$ existiert.

Hinweis: Die Notation $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right]$ steht für die Linksnebenklasse $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} H$. „Wohldefiniert" bedeutet, dass das Bild $\frac{a}{c}$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten der Linksnebenklasse ist, d.h. aus $\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right] = \left[\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right]$ soll jeweils $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$ folgen.

Betrachte die Abb. $\phi : G \to \mathbb{Q}^\times$, $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \frac{a}{c}$. Wir überprüfen

(1) ϕ ist ein Gruppenhomomorphismus

(2) ϕ ist surjektiv (d.h. $\mathrm{im}(\phi) = \mathbb{Q}^\times$)

(3) $\ker(\phi) = H$

zu (1) Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix} \in G$, mit $a, a', b,$ $b', c, c' \in \mathbb{Q}$ und $ac \neq 0$, $a'c' \neq 0 \Rightarrow c, c' \neq 0$

$\Rightarrow cc' \neq 0$, und $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} aa' & ab'+bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}\right)$

$= \frac{aa'}{cc'} = \frac{a}{c} \cdot \frac{a'}{c'} = \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) \cdot \phi\left(\begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}\right)$

zu (2) Sei $r \in \mathbb{Q}^\times$ und $\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{2, \mathbb{Q}}$.

$r \cdot 1 = r \neq 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$, und außerdem

$\phi\left(\begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \frac{r}{1} = r$.

zu (3) Sei $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$, mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $ac \neq 0$

Dann gilt die Äquivalenz $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \ker(\phi) \iff$
$\phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = 1 \iff \frac{a}{c} = 1 \iff a = c \iff \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in H$

Die Voraussetzungen des Hom-satzes sind also erfüllt.
Es existiert folglich ein Isom. $\varphi : G/H \to \mathbb{Q}^*$ mit
$\varphi\left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}\right) = \phi\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}\right) = \frac{a}{c}$ für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G$,
mit $a, b, c \in \mathbb{Q}$, $ac \neq 0$ $\square$

Übungen:
(1) Variante zu H25T2A2:
Sei G ein Gruppe mit Elementen $g, h \in G$ und $n \in \mathbb{N}$,

b.

$\neq 0$

$ab' + bc$

cc'

dem

$ac \neq 0$

$n \geq 3$, so dass $G = \langle g, h \rangle$, $\mathrm{ord}(g) = n$, $\mathrm{ord}(h) = 2$ und $ghgh = e$ gilt.

(a) Beweisen Sie, dass G eine nicht-abelsche Gruppe der Ordnung $2n$ ist und $G = \{ g^a h^b \mid 0 \leq a < n,\ b \in \{0,1\} \}$ gilt, ohne bekannte Sätze über die Diedergruppen zu verwenden.

(b) Sei nun $n = 6$ und $N = \{e, g^3\} \subseteq G$. Zeigen Sie, dass N ein Normalteiler von G ist. Bestimmen Sie den Isomorphietyp von G/N. Ohne Bew. darf verwendet werden, dass es bis auf Isomorphie genau zwei Gruppen der Ordnung 6 gibt.

Übung zum Thema Faktorgruppen: F13T2A1, H18T2A3

Übung zum Hom-satz: F14T2A3

Gruppenoperationen

Def.: Sei G eine Gruppe, X eine Menge.
Operation von G auf X = Abb. $\bullet : G \times X \to X$
mit den Eigenschaften

(i) $\forall x \in X : e_G \bullet x = x$

(ii) $\forall g, h \in G : \forall x \in X : g \bullet (h \bullet x) = (gh) \bullet x$

Def.: Sei $\bullet : G \times X \to X$ eine Operation von G auf X und $x \in X$.

(i) Bahn von x $\quad G(x) = \{ g \bullet x \mid g \in G \}$
(ist Teilmenge von X)

(ii) Stabilisator von x $\quad G_x = \{ g \in G \mid g \bullet x = x \}$
(ist eine Untergruppe von G)

(
s
(6
p
p-
alle
Satz
sator
ist

Bem: (i) Die Bahnen bilden eine <u>Zerlegung</u> der Menge X, d.h. je zwei Bahnen sind entweder disjunkt oder gleich. Besteht X nur aus einer einzigen Bahn (äquivalent: $G(x) = X \ \forall x \in X$), dann bezeichnet man die Operation als <u>transitiv</u>.

(ii) Für jedes $x \in X$ gilt $(G : G_x) = |G(x)|$. Ist G endlich, dann ist die Bahnlänge $|G(x)|$ also stets ein Teiler der Gruppenordnung $|G|$.

<u>Beispiele für Gruppenoperationen</u>

(1) $G = SO(2)$ (spezielle orth. Gruppe), $X = \mathbb{R}^2$

$\bullet : G \times X \to X$

$(A, v) \mapsto Av$

Bahnen:

(2) $G = GL_2(\mathbb{R})$, $X = \mathbb{R}^2$, gleiche Operation

In diesem Fall gibt es zwei Bahnen, nämlich $\mathbb{R}^2 \setminus \{0_{\mathbb{R}^2}\}$ und $\{0_{\mathbb{R}^2}\}$.

(3) $n \in \mathbb{N}$, $G = S_n$, $X = M_n = \{1, \dots, n\}$

$\bullet : G \times X \to X$, $(\sigma, k) \mapsto \sigma(k)$

Diese Operation ist transitiv, d.h. M_n ist einzige Bahn.

(4) Jede Gruppe G operiert auf sich selbst durch Konjugation, d.h. durch $g \bullet h = ghg^{-1}$.

(Die Bahn von $h \in G$ haben wir die *Konjugationsklasse* von h genannt, den Stabilisator von h den *Zentralisator* $C_G(h)$ des Elements h.)

(5) Jede Gruppe G operiert auf sich selbst

nge.
$\times X \to X$

$(gh) \cdot x$

sation

$g \in G\}$

$\in G \mid g \cdot x = x\}$
)

durch Linkstranslation, d.h. durch $g \circ h = gh$.
(Die Operation ist transitiv, und die Stabilisatoren sind alle gleich $\{e_G\}$.)

(6) Für endliche Gruppe G und jede Primzahl p operiert G auf der Menge $Syl_p(G)$ der p-Sylowgruppen durch $g \circ P = gPg^{-1}$ für alle $g \in G$, $P \in Syl_p(G)$. (Nach dem 2. Sylowsatz ist die Operation transitiv. Der Stabilisator von $P \in Syl_p(G)$ bzgl. dieser Operation ist jeweils der Normalisator $N_G(P)$.)