F26T3A2: G endliche Gruppe, $|G| > 2$

mit $a = a^{-1} \ \forall a \in G$

bereits gezeigt: G ist abelsch

zu (c) z.zg: $\prod_{a \in G} a = 1$

Da G eine endliche abelsche Gruppe ist, gibt es ein $r \in \mathbb{N}_0$ und Primzahlpotenzen $q_1, \dots, q_r \in \mathbb{N}$ mit $q_j > 1 \ \forall j \in \{1, \dots, r\}$ so dass $G \cong \mathbb{Z}/q_1\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}/q_r\mathbb{Z}$

Dies

gleich

Wegen $a = a^{-1}$ $\forall a \in G$ sind alle Elemente $\neq e_G$ in G von Ordnung 2. $\Rightarrow q_j = 2$ $\forall j \in \{1, \ldots, r\}$ $\Rightarrow G \cong (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$

Wegen $|G| > 2$ muss $r \geq 2$ gelten.

Es genügt nun also z.zg.: $\sum_{a \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r} a = 0_{(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r}$

Tatsächlich gilt $\sum_{a \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r} (a_1, \ldots, a_r) =$

$\sum_{a_1 \in \{\bar{0}, \bar{1}\}} \cdots \sum_{a_r \in \{\bar{0}, \bar{1}\}} (a_1, \ldots, a_r)$ Für $1 \leq j \leq r$

ist die j-te Komponente dieser Summe jeweils geg. durch $\sum\limits_{a\in A_j} a_j + \sum\limits_{a\in B_j} a_j$ mit

$A_j = \{a \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \mid a_j = \bar{0}\}$, $B_j = \{a \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r \mid a_j = \bar{1}\}$

Diese Summe ist gleich $|A_j| \cdot \bar{0} + |B_j| \cdot \bar{1}$.

$r \geq 2 \Rightarrow |B_j| = 2^{r-1}$ ist gerade $\rightarrow$

$$\sum a_j + \sum_{a\in B_j} a_j = |A_j| \cdot \bar{0} + |B_j| \cdot \bar{1} = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0}.$$

Dies zeigt, dass alle Komponenten der Summe gleich $\bar{0}$ sind. $\square$

2 | ist die j-te Komponente dieser Summe
jeweils geg. durch $\sum a_i + \sum a_i$ mit

<u>Erinnerung</u>:

(i) Normalteiler einer Gruppe G = Untergruppe N mit der Eigenschaft $gN = Ng \ \forall g \in G$
(äquivalente Bed.: $gNg^{-1} \subseteq N \ \forall g \in G$
oder: $gng^{-1} \in N \ \forall g \in G, n \in N$)
(wichtige Beispiele für Normalteiler: Kerne von Homomorphismen, triviale Normalteiler $\{e_G\}$, G, Untergruppen vom Index 2)

(ii) Index einer Untergruppe U einer Gruppe G = Anzahl der Linksnebenklassen von U)

(oder: Anzahl der Rechtsnebenklassen)

(iii) Eine Gruppe G wird einfach genannt, wenn sie genau zwei Normalteiler hat, nämlich $\{e_G\}$ und G (d.h. es gilt außerdem $G \neq \{e_G\}$).

(Beispiele: $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, wobei p Primzahl
A_n mit $n \geq 5$)

F26T1A1 (a) Sei p eine Primzahl und G eine p-Gruppe, d.h. eine Gruppe von p-Potenzordnung. Zeigen Sie: G ist einfach $\Leftrightarrow |G| = p$.

Lau
Ist
Nach
$g \in G$
teiler
$|\langle g \rangle| =$
Im Fall
malteil
3. Fall:

„$\Leftarrow$" $|G| = p \Rightarrow$ Für jede Untergr. U von G ist $|U|$ Teiler von p, also $|U| \in \{1, p\} \Rightarrow U = \{e_G\}$ oder $U = G$, außerdem $|G| > 1 \Rightarrow G \neq \{e_G\} \Rightarrow G$ ist einfach

„$\Rightarrow$" Sei $r \in \mathbb{N}_0$ die Zahl mit $|G| = p^r$.

1. Fall: $r = 0$

$|G| = p^0 = 1 \Rightarrow G = \{e_G\} \Rightarrow$ G ist nicht einfach $\lightning$

2. Fall: $r \geq 2$

F2

Un

(a) g

(b) Z

Sei g

1. Fall:

[allgeme

2. Fall:

Und wegen

beiden

G disjunkt

ist, erhalten

lassen)
ge-
nal-
d.h. es

hl

e Prim-
, d.h. eine
zeugen Sie:

Laut Vl. besitzt G als p-Gruppe $\neq \{e_G\}$ ein Zentrum $Z(G) \neq \{e_G\}$.

Ist $Z(G) = G$, dann ist G abelsch.

Nach dem Lemma von Cauchy gibt es ein $g \in G$ mit $\operatorname{ord}(g) = p$. $\Rightarrow \langle g \rangle$ ist Normalteiler von G mit $\{e_G\} \subsetneq \langle g \rangle \subsetneq G$ (wg. $|\langle g \rangle| = p$, $|G| > p$) $\Rightarrow$ G ist nicht einfach)

Im Fall $Z(G) \subsetneq G$ ist $Z(G)$ ein nichttriv. Normalteiler von G $\Rightarrow$ G ist nicht einfach ↯

<u>3. Fall:</u> $r = 1$ In diesem Fall gilt
$$|G| = p^1 = p.$$
$\square$

F26T3A1 Sei G eine Gruppe und H eine Untergruppe von G.

(a) Geben Sie die Def. des Index $(G:H)$ an. (s. o.)

(b) Zeigen Sie: Aus $(G:H) = 2$ folgt $H \trianglelefteq G$.

Sei $g \in G$. z. zg: $gH = Hg$

1. Fall: $g \in H$ Dann gilt $gH = H = Hg$

[allgemein: $gH = g'H \Leftrightarrow g' \in gH$]

2. Fall: $g \notin H$ Dann gilt $gH \neq H$, und wegen $(G:H) = 2$ sind dies die einzigen beiden Linksnebenklassen von H. Da G disjunkte Vereinigung der Linksnebenklassen ist, erhalten wir die Zerlegung $G = H \cup gH$

$\Rightarrow gH = G \setminus H$ Genauso ergibt sich aus $Hg \neq H$ die Zerlegung $G = H \cup Hg$ und $Hg = G \setminus H$. also: $gH = G \setminus H = Hg$

(c) Geben Sie ein Beispiel an für eine Gruppe G und eine Untergruppe H mit $(G:H) = 3$, wobei H kein Normalteiler von G ist.

Sei $G = S_3$ und $H = \langle (12) \rangle = \{ id, (12) \}$. Aus $|G| = 3! = 6$ und $|H| = 2$ folgt $(G:H) = \frac{|G|}{|H|} = \frac{6}{2} = 3$. Es gilt $(13) \in G$, $(12) \in H$, aber

$(13)\circ(12)\circ(13)^{-1} = (13)\circ(12)\circ(13) = (23) \notin H$

$\Rightarrow$ H ist kein Normalteiler von G.

$\left[(13)\circ(12)\circ(13) = (1)(23) = (23) \right]$

4 (d)* gesucht: nicht-abelsche Gruppe G, Untergruppe H mit $(G:H) = 3$, $H \trianglelefteq G$

Sei $G = A_4$ und $H = V_4$, die Kleinsche Vierergruppe.

Lt. Vl. gilt $|G| = 12$, $|H| = 4$, also $(G:H) = \frac{|G|}{|H|} = \frac{12}{4} = 3$

noch z.zg.: $H \trianglelefteq G$. Sei $\sigma \in A_4$ und $\tau \in V_4$.

z.zg.: $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in V_4$ 1. <u>Fall</u>: $\tau = id$

$\Rightarrow \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = \sigma \circ \sigma^{-1} = id \in V_4$

2. Fall: τ ist Doppeltransp.

Dann ist auch $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ eine Doppeltransp., weil Konjugation mit σ den Zerlegungstyp erhält. $\Rightarrow \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} \in V_4$

alternative Möglichkeit:

Sei $G = S_3 \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, $H = S_3 \times \langle \bar{2} \rangle$

(Überprüfung: als Übung)

Erinnerung:

Ordnung eines Gruppenelements $g \in G$
$=$ Ordnung der Untergruppe $\langle g \rangle = \{g^a \mid a \in \mathbb{Z}\}$
(äquivalent dazu: $\mathrm{ord}(g) =$ kleinstes $n \in \mathbb{N}$ mit $g^n = e_G$ bzw. $\mathrm{ord}(g) = \infty$, falls kein solches $n \in \mathbb{N}$ existiert)

wichtige Regel:

G Gruppe, $g \in G$, $n \in \mathbb{N}$, dann:

$$g^n = e_G \iff \mathrm{ord}(g) \mid n$$

F26T2A1 Beweise oder widerlege

(a) Es gibt eine Gruppe G, deren sämtliche nichttriviale Elemente entweder von Ordnung 2 oder von Ordnung 1013 sind, wobei beide Ordnungen vorkommen. (ohne Beweis: 1013 ist Primzahl)

Ja, die Gruppe D_{1013} hat diese Eigenschaft. Bekanntlich haben alle Elemente der Diedergruppe D_n für $n \geq 3$ jeweils Ordnung 2, oder die Ordnung ist ein Teiler von n. Im Fall $n = 1013$ sind 1 und 1013 die einzigen Teiler. Außerdem besitzt n jeweils ein Erz-system bestehend aus einem Element der Ordnung 2 und einem Element

ämtliche
Ord-
wobei
eweis:

enschaft.
Dieder-
ung 2,
n. Im Fall
Feiler. Außer-
bestehend
nen Element

der Ordnung n. In D_{1013} gibt es also Elemente der Ordnungen 2 und 1013.

(6) Es gibt eine abelsche Gruppe, deren sämtliche nichttriviale Elemente entweder von Ordnung 2 oder von Ordnung 1013 sind.

Ja, die Gruppe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ hat diese Eigenschaft. Das einzige nichttriv. Element hat Ordnung 2.

Übungen: H23T1A2
H13T3A3

Anmerkung:

In Teil (b) wäre es sinnvoller gewesen, wie in Teil (a) nach der Existenz einer abelschen Gruppe zu fragen, bei der 1, 2 und 1013 die einzigen vorkommenden Elementordnungen sind (in der also alle drei Ordnungen auch tatsächlich vorkommen). In diesem Fall lautet die Antwort nein.

Nehmen wir an, G ist eine solche Gruppe. Seien $g, h \in G$ mit $\mathrm{ord}(g) = 2$ und $\mathrm{ord}(h) = 1013$. Weil 2026 ein Vielfaches von 2 und von 1013 ist, gilt $g^{2026} = h^{2026} = e_G$. Weil G abelsch ist, dürfen wir die Rechenregel $(ab)^m = a^m \cdot b^m$ für alle $a, b \in G$ und $m \in \mathbb{Z}$ anwenden, und erhalten

$$(gh)^{2026} \;=\; g^{2026} \cdot h^{2026} \;=\; e_G \cdot e_G \;=\; e_G .$$

Es folgt $\mathrm{ord}(gh) \mid 2026$, und somit $\mathrm{ord}(gh) \in \{1, 2, 1013, 2026\}$. Wäre $\mathrm{ord}(gh)$ ein Teiler von 2, würden wir

$$e_G \;=\; (gh)^2 \;=\; g^2 \cdot h^2 \;=\; e_G \cdot h^2 \;=\; h^2$$

und somit $\mathrm{ord}(h) \mid 2$ erhalten, im Widerspruch zu $\mathrm{ord}(h) = 1013$. Aus $\mathrm{ord}(gh) = 1013$ würde sich

$$\begin{aligned} e_G \;&=\; (gh)^{1013} \;=\; g^{1013} \cdot h^{1013} \;=\; g^{1013} \cdot e_G \\ &=\; (g^2)^{506} \cdot g \;=\; e_G^{506} \cdot g \;=\; g \end{aligned}$$

ergeben, im Widerspruch zu $\mathrm{ord}(g) = 2$. So aber müsste gh ein Element der Ordnung 2026 sein, was ausgeschlossen ist, weil 1, 2 und 1013 die einzigen vorkommenden Elementordnungen sind. Also existiert eine Gruppe G mit den angegebenen Eigenschaften nicht.